Matrices

1. Un changement de base

```
> restart:with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
> f1:=vector([1,1,1]):f2:=vector([1,-1,2]):f3:=vector([-1,1,1])
  :
> A:=matrix([f1,f2,f3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> rank(A);
```

$$3$$

Ainsi, les trois vecteurs constituent une famille de rang 3, donc une base de l'espace.

```
> T:=matrix([[2,1,0],[0,2,0],[0,0,-1]]);
```

$$T := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ben oui : voir la définition de u...

```
> P:=transpose(A);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

C'est la matrice de passage de la base canonique vers la base des fi

```
> A:=evalm(P&*T&*inverse(P));
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{6} & \frac{-2}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{-5}{6} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

```
> I3:=Matrix(3,3,shape=identity);
```

$$I3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> kernel(A-2*I3);
```

$$\{[1, 1, 1]\}$$

Forcément...

```
> kernel(A+I3);
```

$$\{[-1, 1, 1]\}$$

Pareil... Ces deux derniers sous-espaces ne sont pas supplémentaires : voir les dimensions.

```
> seq(evalm(T^k),k=1..10);
```

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&4&0\\0&4&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8&12&0\\0&8&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}16&32&0\\0&16&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}32&80&0\\0&32&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}64&192&0\\0&64&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}128&448&0\\0&128&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}256&1024&0\\0&256&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}512&2304&0\\0&512&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1024&5120&0\\0&1024&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Ca ne serait pas du genre triangulaire, avec 2^k et (-1)^k sur la diagonale, et k*2^(k-1) dessus ???

```
> evalm(matrix([[2^k,k*2^(k-1),0],[0,2^k,0],[0,0,(-1)^k]])&*T);
```

$$\begin{bmatrix}2\,2^k & 2^k+2\,k\,2^{(k-1)} & 0\\ 0 & 2\,2^k & 0\\ 0 & 0 & -(-1)^k\end{bmatrix}$$

Gagné (pour la preuve par récurrence, un calcul à la main va plus vite...)

```
> An:=evalm(P&*matrix([[2^n,n*2^(n-1),0],[0,2^n,0],[0,0,(-1)^n]
  ])&*inverse(P));
```

$$An := \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\,2^n+\frac{1}{2}\,(-1)^n & \frac{1}{6}\,2^n-\frac{1}{3}\,n\,2^{(n-1)}-\frac{1}{6}\,(-1)^n & \frac{1}{3}\,n\,2^{(n-1)}+\frac{1}{3}\,2^n-\frac{1}{3}\,(-1)^n\\ \frac{1}{2}\,2^n-\frac{1}{2}\,(-1)^n & \frac{5}{6}\,2^n-\frac{1}{3}\,n\,2^{(n-1)}+\frac{1}{6}\,(-1)^n & \frac{1}{3}\,n\,2^{(n-1)}-\frac{1}{3}\,2^n+\frac{1}{3}\,(-1)^n\\ \frac{1}{2}\,2^n-\frac{1}{2}\,(-1)^n & -\frac{1}{6}\,2^n-\frac{1}{3}\,n\,2^{(n-1)}+\frac{1}{6}\,(-1)^n & \frac{1}{3}\,n\,2^{(n-1)}+\frac{2}{3}\,2^n+\frac{1}{3}\,(-1)^n\end{bmatrix}$$

```
> subs(n=50,evalm(An));
```

$$\begin{bmatrix}\frac{1125899906842625}{2} & \frac{-55169095435288577}{6} & \frac{29273397577908223}{3}\\ \frac{1125899906842623}{2} & \frac{-50665495807918079}{6} & \frac{27021597764222977}{3}\\ \frac{1125899906842623}{2} & \frac{-57420895248973823}{6} & \frac{30399297484750849}{3}\end{bmatrix}$$

```
> evalm(A^50);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1125899906842625}{2} & \frac{-55169095435288577}{6} & \frac{29273397577908223}{3} \\ \frac{1125899906842623}{2} & \frac{-50665495807918079}{6} & \frac{27021597764222977}{3} \\ \frac{1125899906842623}{2} & \frac{-57420895248973823}{6} & \frac{30399297484750849}{3} \end{bmatrix}$$

```
> %-%%;
```

$$0$$

A vérifier tout de meme

```
> evalm(A^51-subs(n=51,evalm(An)));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Une matrice avec un paramètre

```
> restart:with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

Voila comment j'ai construit A

```
> A:=matrix([[a-1515,0,0],[0,a-1,0],[0,0,a-2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a-1515 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$$

```
> A:=addrow(A,2,1,20):A:=addrow(A,3,1,500);
```

$$A := \begin{bmatrix} a-1515 & 20\,a-20 & 500\,a-1000 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$$

```
> A:=addcol(A,2,1,1789):A:=addcol(A,3,1,-40);
```

$$A := \begin{bmatrix} 15781\,a+2705 & 20\,a-20 & 500\,a-1000 \\ 1789\,a-1789 & a-1 & 0 \\ -40\,a+80 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$$

```
> A:=addcol(A,3,1,-31):A:=addcol(A,2,3,-25);
```

$$A := \begin{bmatrix} 281\,a+33705 & 20\,a-20 & -500 \\ 1789\,a-1789 & a-1 & -25\,a+25 \\ -71\,a+142 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$$

```
> A:=addrow(A,1,3,-1):A:=addcol(A,3,2,20);
```

$$A := \begin{bmatrix} 281\,a + 33705 & -10020 + 20\,a & -500 \\ 1789\,a - 1789 & -499\,a + 499 & -25\,a + 25 \\ -352\,a - 33563 & 9980 & 498 + a \end{bmatrix}$$

Et pour la passer à mon éditeur :

```
> latex(%);
 \left[ \begin {array}{ccc} 281\,a+33705&-20020+20\,a&-500
\\\noalign{\medskip}1789\,a-1789&-999\,a+999&-25\,a+25
\\\noalign{\medskip}-633\,a-67268&39960&998+a\end {array} \right]
```

Vérifications pour A

```
> rank(A);
```

$$3$$

En fait, non...

```
> det(A);
```

$$-1518\,a^2 + a^3 + 4547\,a - 3030$$

```
> factor(%);
```

$$(a - 1515)\,(a - 1)\,(a - 2)$$

Lorsque a ne vaut ni 1, ni 2, ni 1515, det(A)<>0, donc A est inversible, donc de rang 3.

```
> subs(a=1,evalm(A));
```

$$\begin{bmatrix} 33986 & -10000 & -500 \\ 0 & 0 & 0 \\ -33915 & 9980 & 499 \end{bmatrix}$$

```
> rank(%);
```

$$2$$

```
> subs(a=2,evalm(A));
```

$$\begin{bmatrix} 34267 & -9980 & -500 \\ 1789 & -499 & -25 \\ -34267 & 9980 & 500 \end{bmatrix}$$

```
> rank(%);
```

$$2$$

```
> subs(a=1515,evalm(A));
```

$$\begin{bmatrix} 459420 & 20280 & -500 \\ 2708546 & -755486 & -37850 \\ -566843 & 9980 & 2013 \end{bmatrix}$$

```
> rank(%);
```

$$2$$

Construction de B

On part d'une matrice diagonale qui répond aux conditions de rang :

```
> B:=matrix([[a+1,0,0],[0,a+1,0],[0,0,a-3]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

```
> B:=addcol(B,2,1,2):B:=addcol(B,3,1,2):B:=addrow(B,3,2,-1):
  B:=addrow(B,1,3,-1);
```

$$B := \begin{bmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 8 & a+1 & -a+3 \\ a-7 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

```
> B:=addrow(B,2,1,2);
```

$$B := \begin{bmatrix} 17+a & 2\,a+2 & -2\,a+6 \\ 8 & a+1 & -a+3 \\ a-7 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

```
> det(B);
```

$$-a^2 - 5\,a - 3 + a^3$$

```
> factor(det(B));
```

$$(a-3)\,(a+1)^2$$

```
> rank(subs(a=3,evalm(B)));
```

$$2$$

```
> rank(subs(a=-1,evalm(B)));
```

$$1$$

Gagné

3. Une matrice stochastique

```
> restart:with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> A:=matrix([[1/6,0,1/3],[1/2,1/2,1/3],[1/3,1/2,1/3]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Caractérisation des matrices stochastiques

```
> evalm(vector([1,1,1])&*A);
```

$$[1, 1, 1]$$

Forcément... cela traduit exactement le fait que la somme sur chaque colonne vaut 1.

```
> B:=evalm(A^50):
> evalm(vector([1,1,1])&*B);
```

$$[1, 1, 1]$$

Ainsi, A^50 est stochastique

A-I3 non inversible

La relation de la question précédente, une fois transposée, nous dit que t(A)-I n'est pas injective donc par inversible. Il en est donc de même pour t(t(A)-I)=A-I...

```
> I3:=Matrix(3,3,shape=identity);
```

$$I3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ben oui...

```
> kernel(A-I3);
```

$$\{\left[1, \frac{8}{3}, \frac{5}{2}\right]\}$$

```
> colspace(A-I3);
```

$$\{[0, 1, -1], [1, 0, -1]\}$$

A^100 et A^200

```
> map(evalf,evalm(A^100));
```

$$\begin{bmatrix} .1621621622 & .1621621622 & .1621621622 \\ .4324324324 & .4324324324 & .4324324324 \\ .4054054054 & .4054054054 & .4054054054 \end{bmatrix}$$

```
> map(evalf,evalm(A^200));
```

$$\begin{bmatrix} .1621621622 & .1621621622 & .1621621622 \\ .4324324324 & .4324324324 & .4324324324 \\ .4054054054 & .4054054054 & .4054054054 \end{bmatrix}$$

Tiens tiens...
Au fait, comment Maple fait-il pour calculer A^100 ? Plus précisément, il fait combien de multiplications matricielles ?

Un polynome annulateur

```
> B:=evalm(A^3+a*A^2+b*A+c*I3);
```

$$B := \begin{bmatrix} \frac{35}{216} + \frac{5}{36}a + \frac{1}{6}b + c & \frac{1}{6} + \frac{1}{6}a & \frac{17}{108} + \frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b \\ \frac{31}{72} + \frac{4}{9}a + \frac{1}{2}b & \frac{31}{72} + \frac{5}{12}a + \frac{1}{2}b + c & \frac{47}{108} + \frac{4}{9}a + \frac{1}{3}b \\ \frac{11}{27} + \frac{5}{12}a + \frac{1}{3}b & \frac{29}{72} + \frac{5}{12}a + \frac{1}{2}b & \frac{11}{27} + \frac{7}{18}a + \frac{1}{3}b + c \end{bmatrix}$$

```
> eq:=seq(seq(B[i,j],i=1..3),j=1..3);
```

$$eq := \frac{35}{216} + \frac{5}{36}a + \frac{1}{6}b + c, \frac{31}{72} + \frac{4}{9}a + \frac{1}{2}b, \frac{11}{27} + \frac{5}{12}a + \frac{1}{3}b, \frac{1}{6} + \frac{1}{6}a, \frac{31}{72} + \frac{5}{12}a + \frac{1}{2}b + c,$$

$$\frac{29}{72}+\frac{5}{12}a+\frac{1}{2}b, \frac{17}{108}+\frac{1}{6}a+\frac{1}{3}b, \frac{47}{108}+\frac{4}{9}a+\frac{1}{3}b, \frac{11}{27}+\frac{7}{18}a+\frac{1}{3}b+c$$

```
> solve({eq},{a,b,c});
```

$$\{b=\frac{1}{36}, c=\frac{-1}{36}, a=-1\}$$

```
> minpoly(A,X);
```

$$-\frac{1}{36}+\frac{1}{36}X-X^2+X^3$$

Cette fonction magique sera expliquée... l'année prochaine en maths.

```
> P:=X^3-X^2+X/36-1/36:
> evalm(subs(X=A,P));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcul de A^n

```
> factor(P);
```

$$\frac{1}{36}(X-1)(36X^2+1)$$

Le reste dans la division de X^n par P est de la forme dX^2+eX+f : on trouve d e et f en évaluant cette relation en les racines de P :

```
> solve(P);
```

$$1, \frac{1}{6}I, \frac{-1}{6}I$$

```
> S:=solve({1=d+e+f,(I/6)^n=-d/36+e*I/36+f,(-I/6)^n=-d/36-e*
  I/6+f},{d,e,f});
```

$$S := \{f=\frac{36}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n+\frac{1}{37}+\frac{36}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{36}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n+\frac{216}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n,$$
$$e=\frac{-36}{7}I\left(\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\left(\frac{-1}{6}I\right)^n\right),$$
$$d=\frac{36}{37}+\frac{1296}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{1296}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{36}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{216}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n\}$$

```
> assign(%):
> evalm(d*A^2+e*A+f*I3);
```

$$\left[\frac{6}{37}+\frac{216}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{216}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n+\frac{31}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n+\frac{186}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{6}{7}I\left(\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\left(\frac{-1}{6}I\right)^n\right),\right.$$
$$\frac{6}{37}+\frac{216}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{216}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{6}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{36}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n,$$
$$\left.\frac{6}{37}+\frac{216}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{216}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{6}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{36}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{12}{7}I\left(\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\left(\frac{-1}{6}I\right)^n\right)\right]$$

$$\left[\frac{16}{37}+\frac{576}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{576}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{16}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{96}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{18}{7}I\left(\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\left(\frac{-1}{6}I\right)^n\right),\right.$$
$$\frac{16}{37}+\frac{576}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{576}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n+\frac{3}{37}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n+\frac{18}{37}\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{18}{7}I\left(\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\left(\frac{-1}{6}I\right)^n\right),$$
$$\left.\frac{16}{37}+\frac{576}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{576}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{16}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{96}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{12}{7}I\left(\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\left(\frac{-1}{6}I\right)^n\right)\right]$$
$$\left[\frac{15}{37}+\frac{540}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{540}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{15}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{90}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{12}{7}I\left(\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\left(\frac{-1}{6}I\right)^n\right),\right.$$
$$\frac{15}{37}+\frac{540}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{540}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{15}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{90}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{18}{7}I\left(\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\left(\frac{-1}{6}I\right)^n\right),$$
$$\left.\frac{15}{37}+\frac{540}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{540}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n+\frac{22}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n+\frac{132}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{12}{7}I\left(\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\left(\frac{-1}{6}I\right)^n\right)\right]$$

```
> evalm(subs(n=50,%)-A^50);
```

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Limite de A^n quand n->infini

```
> d,e,f;
```

$$\frac{36}{37}+\frac{1296}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{1296}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{36}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{216}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n,\ \frac{-36}{7}I\left(\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\left(\frac{-1}{6}I\right)^n\right),$$
$$\frac{36}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n+\frac{1}{37}+\frac{36}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{36}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n+\frac{216}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n$$

```
> limit(d,n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}\frac{36}{37}+\frac{1296}{259}I\left(\frac{1}{6}I\right)^n-\frac{1296}{259}I\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{36}{259}\left(\frac{-1}{6}I\right)^n-\frac{216}{259}\left(\frac{1}{6}I\right)^n$$

Tsss...

```
> d_inf:=36/37:e_inf:=0:f_inf:=1/37:
> B:=evalm(d_inf*A^2+f_inf*I3);
```

$$B:=\begin{bmatrix}\frac{6}{37}&\frac{6}{37}&\frac{6}{37}\\[2mm]\frac{16}{37}&\frac{16}{37}&\frac{16}{37}\\[2mm]\frac{15}{37}&\frac{15}{37}&\frac{15}{37}\end{bmatrix}$$

```
> map(evalf,B);
```

$$\begin{bmatrix} .1621621622 & .1621621622 & .1621621622 \\ .4324324324 & .4324324324 & .4324324324 \\ .4054054054 & .4054054054 & .4054054054 \end{bmatrix}$$

Voir la troisième question...

Propriétés de la limite

```
> evalm(B^2);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{37} & \frac{6}{37} & \frac{6}{37} \\ \frac{16}{37} & \frac{16}{37} & \frac{16}{37} \\ \frac{15}{37} & \frac{15}{37} & \frac{15}{37} \end{bmatrix}$$

Ainsi, B est un projecteur.

```
> evalm(A&*B),evalm(B&*A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{37} & \frac{6}{37} & \frac{6}{37} \\ \frac{16}{37} & \frac{16}{37} & \frac{16}{37} \\ \frac{15}{37} & \frac{15}{37} & \frac{15}{37} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{6}{37} & \frac{6}{37} & \frac{6}{37} \\ \frac{16}{37} & \frac{16}{37} & \frac{16}{37} \\ \frac{15}{37} & \frac{15}{37} & \frac{15}{37} \end{bmatrix}$$

B commute bien avec A. On peut le montrer en passant à la limite la relation A^(n+1)=A.A^n...

```
> colspace(B);
```

$$\left\{\left[1, \frac{8}{3}, \frac{5}{2}\right]\right\}$$

C’est le noyau de A-I. Déjà, si AX=X, alors A^nX=X pour tout n, puis BX=X, donc X est dans l’image du projecteur. Réciproquement, si X est dans l’image de B, alors BX=X, donc ABX=AX, mais AB=B, donc ABX=BX=X, et ainsi AX=X.

```
> kernel(B);
```

$$\{[-1, 1, 0], [-1, 0, 1]\}$$

C’est l’image de A-I. Preuve ? Déjà, au niveau des dimensions, le théorème du rang appliqué à B et à A-I nous assure que ça marche. Il reste à montrer une inclusion : à vous d jouer !