

Matrices

1 Un changement de base

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1, -1, 2)$, $f_3 = (-1, 1, 1)$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) forme une base de E . On note \mathcal{F} cette base.
2. Soit u l'endomorphisme de E défini par : $u(f_1) = 2f_1$, $u(f_2) = f_1 + 2f_2$, $u(f_3) = -f_3$. Donner la matrice D de u dans \mathcal{F} puis calculer la matrice A de u dans la base canonique.
3. Donner une base de $\text{Ker}(u - 2\text{Id})$ et de $\text{Ker}(u + \text{Id})$. Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires ?
4. Visualiser D^n pour n de 2 à 10. En déduire une formule générale que l'on prouvera "à la main".
5. Calculer A^n à l'aide du changement de base. Vérifier votre résultat avec $n = 50$ puis $n = 51$ (substituer 50 puis 51 à n dans votre formule, et comparer au résultat calculé directement).

Maple :
linalg, vector,
matrix, evalm,
inverse,
transpose,
rank, kernel,
seq, subs.

► Les Maths derrière : Formules de changement de base, calcul de T^n , où T est triangulaire gentille ; calcul de A^n par changement de base.

2 Une matrice avec un paramètre

On rappelle (!) qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

On travaille ici avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 281a + 33705 & -20020 + 20a & -500 \\ 1789a - 1789 & -999a + 999 & -25a + 25 \\ -633a - 67268 & 39960 & 998 + a \end{pmatrix},$$

Maple :
rank, det,
factor, subs,
evalm, addcol,
addrow.

où a est un paramètre réel.

Après que quelqu'un se soit sacrifié, les autres pourront récupérer cette matrice via le réseau...

1. A est-elle inversible ?
2. Quel est le rang de A ?

Pour construire cette matrice bizarre, l'idée est de partir d'une matrice diagonale dont on contrôle bien le rang, puis de faire des opérations élémentaires dans tous les sens : celles-ci conservent le rang comme chacun sait. Les fonctions de base pour de telles opérations sont : `addcol`, `addrow`.

3. Construire une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à l'aide d'un paramètre a , vérifiant les propriétés suivantes :
 - B est inversible sauf pour $a = 3$ et $a = -1$.

- Pour $a = 3$, le rang de B est 2 alors que pour $a = -1$, son rang est 1.
- B est de la forme $\begin{pmatrix} \cdot & 2a+2 & -2a+6 \\ 8 & \cdot & \cdot \\ a-7 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$.

► Les Maths derrière : *Caractérisation de l'inversibilité par le déterminant ; conservation du rang par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes.*

3 Une matrice stochastique

Une matrice est dite stochastique lorsque la somme des éléments de chaque colonne vaut 1 (de telles matrices interviennent de façon naturelle en probabi-

lités). On considère ici la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Maple : matrix, evalm, vector, seq, solve, minpoly, factor, assign, subs, limit, map, evalf, kernel, colspace.

1. Calculer le produit $(1 \ 1 \ 1)A$. Expliquer. Vérifier que A^{50} est stochastique.
2. Vérifier que $A - I_3$ est non inversible¹ ; déterminer son image et son noyau.
3. A l'aide de `map` et `evalf`, évaluer A^{100} et A^{200} . Qu'observe-t-on ?
4. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$. Dans la suite, on note $P = X^3 + aX^2 + bX + c$.
5. Demander à Maple ce que vaut `minpoly(A, X)`...
6. A l'aide des racines de P , calculer le reste dans la division euclidienne de X^n par P .
7. Exprimer A^n à l'aide de A^2 , A , I_3 et n . Vérifier avec $n = 50$.
8. Montrer que A^n tend² vers une matrice B que l'on déterminera.
9. Montrer que B est un projecteur qui commute avec A . Donner les directions propres de B , c'est-à-dire son noyau et son image. Quel rapport avec A ?

► Les Maths derrière : *Si A est stochastique, alors A^n aussi ; calcul de A^n par division euclidienne ; si $A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$, alors $AB = BA = B^2 = B$, avec $\text{Im } B = \text{Ker}(A - I_3)$ et $\text{ker } B = \text{Im}(A - I_3)$.*

¹en y réfléchissant bien, c'est une conséquence de l'observation de la question précédente...
²en tout sens raisonnable