Les 14 Avril et 2 Mai 2005

# Espaces Euclidiens

## 1 Orthogonalisation

On se propose d'orthogonaliser des familles de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, puis $\mathbb{R}_6[X]$. Le procédé de Schmidt appliqué à une base $(e_1, ..., e_n)$ conduit à la famille orthogonalisée $(f_1, ..., f_n)$, avec $f_1 = e_1$, et pour tout $i > 1$, $f_i = e_i - \sum_{k=1}^{i} \frac{<f_i|f_k>}{\|f_k\|^2} f_k$. Bien entendu, le produit scalaire reste à définir : dans $\mathbb{R}^n$, on dispose d'un produit scalaire naturel (en Maple, c'est la fonction `dotprod`, qui prend en entrée deux vecteurs et retourne un scalaire), mais dans $\mathbb{R}_n[X]$, on dispose d'une foultitude de produits scalaires classiques (qui seront définis comme des fonctions de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$).

**Maple :** vector, GramSchmidt, add, dotprod, evalm, seq, int, orthopoly, rem.

1. Orthonormaliser la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ à l'aide de la fonction `GramSchmidt`.
2. Ecrire une fonction `orthogonalisation`, prenant en entrée une liste de vecteurs (pas nécessairement de $\mathbb{R}^n$) ainsi qu'un produit scalaire (une fonction de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$), et retournant la base orthogonalisée. On devra avoir impérativement un programme de la forme :

   ```
   orthogonalisation:=proc(......)
    local ...;
    ...
    RETURN(...)
   end;
   ```

   On suggère d'utiliser la fonction `add` plutôt que `sum` : elle pose moins de problème dans la gestion des variables locales... Vérifier la validité de votre procédure avec :
   `orthogonalisation([v1,v2,v3],dotprod);` (il s'agit des vecteurs de la question 1).
3. Définir une fonction `scal1` prenant en entrée deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, et retournant $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Vérifier que `scal1(X,X^3);` retourne $\frac{2}{5} \cdots$
4. Orthogonaliser la base canonique de $\mathbb{R}_6[X]$ pour ce produit scalaire. Vérifier que les polynômes obtenus sont proportionnels aux polynômes de Legendre (voir le package `orthopoly`).

► Les Maths derrière : *Procédé de Schmidt ; polynômes orthogonaux.*

## 2 Identification de réflexions/projections orthogonales

Dans cet exercice, $A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 13/14 & -1/7 & -3/14 \\ -1/7 & 5/7 & -3/7 \\ -3/14 & -3/7 & 5/14 \end{bmatrix}$.

On montre (en maths !) que si $u$ a pour matrice $M$ dans une base orthonormée, alors $u$ est une symétrie (resp. projection) orthogonale si et seulement si $M^2 = I_n$ (resp. $M^2 = M$) avec $M$ symétrique.

**Maple :** matrix, evalm, transpose, kernel, identity,crossprod, nops

1. Vérifier que $A$ est une matrice de réflexion (symétrie orthogonale *par rapport à un plan*) mais pas $B$. Déterminer le plan de la réflexion. On donnera une base de ce plan, puis un vecteur de l'orthogonal.
2. Ecrire une fonction `ident_reflexion` prenant en entrée une matrice $(3,3)$, retournant `false` si ce n'est pas une matrice de réflexion, et sinon, retournant un vecteur dirigeant l'orthogonal du plan de la réflexion. Tester sur $A$ et $B$.
3. Même chose pour les projections orthogonales. Le cas échéant, on donnera une base de l'espace sur lequel on projete.
4. Donner la nature précise des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à :

$$C = \frac{1}{146}\begin{bmatrix} 25 & 33 & -44 \\ 33 & 137 & 12 \\ -44 & 12 & 130 \end{bmatrix}, D = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 12 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 12 \\ 4 & 12 & -3 \end{bmatrix}, E = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} -10 & 6 & 15 \\ 6 & -15 & 10 \\ 15 & 10 & 6 \end{bmatrix}.$$

► Les Maths derrière : *Symétries et projections orthogonales.*

## 3 Construction d'une matrice de réflexion/projection

Si $g$ (resp. $p$) est la réflexion par rapport à (resp. sur) $v_0^\perp$, on a :

**Maple :** vector, dotprod, evalm, convert, list, genmatrix

$$g(v) = v - 2\frac{<v|v_0>}{\|v_0\|^2}v_0, \qquad p(v) = v - \frac{<v|v_0>}{\|v_0\|^2}v_0$$

1. Calculer l'image de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par la réflexion par rapport à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}^\perp$.
2. En utilisant la fonction `genmatrix` (après une petite conversion en liste...), construire la matrice de $r$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Vérifier sa trace...
3. Ecrire une fonction `generateur_reflexion` prenant en entrée un vecteur $v_0$ de $\mathbb{R}^3$, et retournant la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport à $v_0^\perp$.
4. Traiter le cas des réflexion par rapport à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^\perp$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^\perp$.
5. Reprendre l'exercice (et les exemples) avec les projections orthogonales sur des plans.