Les 3 et 7 Mars 2005

Des études de suites

Avant de commencer le TP, on sortira feuilles de papier de brouillon et crayons ; puis on sauvera immédiatement sa feuille de travail dans son répertoire personnel.

Dans la marge, on trouve la liste des commandes utilisées dans le corrigé...

1 Quatre vitesses de convergence

On donne quatre suites définies par des relations de récurrence. Dans chaque cas, on demande :

Maple : seq, asympt, rsolve

1. d'écrire un programme prenant un entier n en argument, et calculant le n-ième terme ;
2. d'afficher les 10 premiers termes, ainsi que le 100-ième, le 1000-ième et le 10000-ième ;
3. après avoir constaté que ces suites semblent converger vers une limite commune l, évaluer la différence entre la suite et la limite, ainsi que l'inverse et le logarithme de ces différences, pour $n = 10$, $n = 100$ et $n = 1000$.

Les quatre suites ont pour premier terme 1, et vérifient les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2}{2}, \qquad v_{n+1} = \arctan v_n, \qquad w_{n+1} = \frac{\sin w_n}{2}, \qquad z_n = \sin^2 z_n.$$

NB : il est préférable, dans les programmes, de donner la valeur numérique “`1.`” au premier terme, plutôt que “`1`”, ce qui le fait passer automatiquement en calcul approché, plutôt que d'obtenir des formules exactes et inutilisables.

2 Un phénomène d'instabilité numérique

On s'intéresse à des suites vérifiant des relations de récurrence d'ordre 2. On se propose de comparer certains termes obtenus d'une part avec la formule exacte de ces suites, et d'autre part avec la valeur approchée calculée par un programme.

Maple : rsolve, subs, simplify, expand, numer, denom, remember, evalf

1. La suite de Fibonacci est définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.
   (a) Donner la formule exacte de f_n en fonction de n. Avec cette formule, donner une valeur approchée de f_{100}.
   (b) Ecrire un programme prenant en entrée n, et retournant f_n. Calculer f_{100}.
2. Reprendre le même schéma d'étude avec $g_0 = 1$, $g_1 = -2$, et la relation $g_{n+2} = g_n + \frac{3}{2} g_{n+1}$.

3. Idem avec $h_{n+2} = h_n + \frac{3}{2} h_{n+1}$, mais cette fois les conditions initiales $h_0 = -3$ et $h_1 = \frac{3}{2} \cdot$ Constater qu'il y a un GROS problème, puis l'expliquer !
On pourra demander à Maple de résoudre la récurrence sans conditions initiales...
4. (a) Proposer des conditions initiales pour la suite de Fibonacci (i.e. des valeurs pour f_0 et f_1, sans toucher à la relation de récurrence) qui rende le calcul numérique instable.
On pourra demander à Maple de résoudre fomellement la récurrence, sans condition initiale, puis ajuster ces conditions initiales pour rendre théoriquement nulle la partie de la solution qui explose.
   (b) Vérifier l'instabilité !

3 Des récurrences du premier ordre non monotones

On étudie ici deux suites vérifiant des relations de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, mais avec f décroissante (et pas croissante comme habituellement).

Maple : plot, fsolve, seq, diff

1. Ici, $u_0 = 0$, et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$.
   (a) Représenter le graphe de f ainsi que la droite d'équation $y = x$ sur le même dessin. Prévoir le comportement de la suite u.
   (b) Ecrire une fonction prenant en entrée n et retournant u_n.
   (c) Donner la suite des vingt premiers termes. Décrire le comportement.
   (d) Montrer que les suites v et w de termes généraux $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont monotones. *Par exemple en faisant intervenir la fonction $f \circ f$, qui est croissante, ce qui permet de "propager" l'inégalité entre les deux premiers termes.*
   (e) Montrer que v et w convergent l'une et l'autre vers un point fixe de $f \circ f$. Constater (éventuellement montrer selon le temps) qu'il existe un unique point fixe pour $f \circ f$. Conclure.
2. Sur le même schéma, étudier la suite v définie par $v_0 = 0$, et la relation $v_{n+1} = g(v_n)$, avec $g(t) = \mathrm{e}^{-3t}$.