Espaces euclidiens

On pourra jeter un œil interessé à la feuille de travail Maple... Les exos seront traités dans l'ordre

Exercice 1 Trouver la borne inférieure, pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, de

$$\int_0^{\pi}\big(\cos t-(at+b)\big)^2dt.$$

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, orthonormaliser la base $\mathcal{F}=(f_1,f_2,f_3)$, avec $f_1=(1,1,1)$, $f_2=(1,-1,1)$ et $f_3=(1,0,0)$.

Exercice 3 (*) *Polynômes de Legendre*
On munit $E=\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $<P|Q>=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)dt$.

1. Montrer qu'il existe une unique base orthonormée $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ échelonnée en dégré, dont les coefficients dominants sont >0.
   Dans toute la suite, on pose
   $$\forall k\in[\![0,n]\!],\qquad Q_k=\frac{d^k}{dX^k}\big((X^2-1)^k\big).$$
2. Donner le degré et le coefficient dominant de P_k.
3. Si $k\in[\![0,n]\!]$, montrer que Q_k admet k racines simples dans $]-1,1[$.
   On pourra s'intéresser aux racines (simples et multiples) de $(X^2-1)^k$, puis de ses dérivées successives.
4. Montrer que la famille $(Q_k)_{0\leq k\leq n}$ est orthogonale. On pourra montrer que Q_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ en intégrant p fois par parties $<X^p|Q_k>$, où $p\in[\![0,k-1]\!]$.
5. En déduire que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, il existe $\lambda_k\in\mathbb{R}^*$ tel que $Q_k=\lambda_kP_k$.

Les P_k sont les "polynômes de Legendre". Parfois, on désigne plutôt par Q_k le k-ème polynôme de Legendre, ce qui n'a guère d'importance puisque ces deux polynômes sont proportionnels...
On va voir dans l'exercice suivant que la propriété des n racines simples constatée pour les polynômes de Legendre est en fait systématique pour les polynômes orthogonaux associés à un produit scalaire intégral.

Exercice 4 (*) *Racines des polynômes orthogonaux*
φ désigne ici une application continue à valeurs strictement positives sur un segment $[a,b]$ $(a<b)$. n est un entier strictement positif.

1. Montrer qu'on définit bien un produit scalaire sur $E=\mathbb{R}_n[X]$ en posant :
   $$\forall P,Q\in E,\qquad <P|Q>=\int_a^b PQ\varphi.$$
2. Montrer qu'il existe une unique base de E $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ échelonnée en dégré, orthogonale, et constituée de polynômes unitaires.

3. Montrer que chaque P_k admet exactement k racines simples dans $]a,b[$. On pourra raisonner par l'absurde, noter $x_1, \ldots, x_r$ les racines de P_k *de multiplicité impaire* incluses dans $]a,b[$, puis considérer $<P_k|Q>$, où $Q = (X - x_1)\ldots(X - x_r)$, après avoir justifié le fait que $r \leq k$.

EXERCICE 5 E désigne $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne usuelle. F désigne l'ensemble des quadruplets de réels (a,b,c,d) tels que $a+b+c+d=0$ et $a+2b+3c+4d=0$. Vérifier que F est un sous-espace de E ; déterminer sa dimension, une base orthogonale de F et de $F^{\perp}$, et enfin, donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F.

EXERCICE 6 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $D = \mathbb{R}(1,-2,1)$.

Trace de la matrice obtenue ?

EXERCICE 7 Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $H = \ker\varphi$, où $\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + x_3$.

Trace de la matrice obtenue ?

EXERCICE 8 (*)
Montrer que $O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est fini, et déterminer son cardinal.

EXERCICE 9 Soient p et q deux projections orthogonales de E euclidien. Montrer que $p \circ q = 0$ si et seulement si $q \circ p = 0$.

On pourra noter que si r est une projection orthogonale, alors $\operatorname{Im} r = (\ker r)^{\perp}$.

EXERCICE 10 (*)
Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E tel que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Montrer que p est une projection orthogonale.

On pourra supposer que $\operatorname{Im} f \neq (\ker f)^{\perp}$, *et chercher y tel que $\|p(y)\| > \|y\|$.*

EXERCICE 11 (*)
Soient a, b des vecteurs fixés dans un espace euclidien E de dimension $n \geq 2$. On s'intéresse à la fonction $\varphi : x \in E \setminus \{0\} \mapsto \dfrac{<a|x><b|x>}{\|x\|^2}$.

1. Montrer que φ est bornée.

   φ admet donc sur $E \setminus \{0\}$ des bornes supérieures et inférieures finies S et I, que l'on va déterminer *(on va même montrer que ce sont des extrema, ce qu'on pourrait faire a priori, mais avec des arguments d'analyse un peu élaborés pour de jeunes Jedi).*
2. Si a et b sont positivement liés, montrer que $S = \|a\|\|b\|$ et $I = 0$. Traiter également le cas où a et b sont "négativement liés".

   Dans la suite, on suppose (a,b) libre, on note F le plan $\operatorname{Vect}(a,b)$, et ψ la restriction de φ à $F \setminus \{0\}$.
3. Montrer que tout vecteur de F peut s'écrire $(\rho\cos\theta)a + (\rho\sin\theta)b$ pour un certain $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$; en déduire que ψ admet un maximum $M > 0$ et un minimum $m < 0$, puis déterminer m et M.
4. Montrer que $S = M$ et $I = m$.

Exercice 12 (*)
Montrer :

- qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_{1515}[X]$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{1515}[X], \qquad Q(0) = \int_{-512}^{1024} Q(t)P_0(t)dt;$$

- qu'il n'existe pas de polynôme $R_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \qquad Q(0) = \int_0^1 Q(t)R_0(t)dt$$

- qu'il n'existe pas de fonction continue $\varphi_0 \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \qquad f(0) = \int_0^1 f(t)\varphi_0(t)dt.$$

Par l'absurde : on montrera que si φ_0 répondait au problème, on aurait $\varphi(t_0) = 0$ pour tout $t \in]0,1]$ puis pour tout $t \in [0,1]$.

Exercice 13 (**) *Adjoint d'un endomorphisme*

1. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme v de E tel que :

$$\forall x, y \in E, \qquad <u(x)|y>=<x|v(y)> .$$

   v s'appelle l'*adjoint* de u, et est noté u^*.
2. Déterminer u^* lorsque u est une homothétie, une projection orthogonale ou une symétrie orthogonale.
3. Que dire de $(\lambda u_1 + u_2)^*$? Le prouver soigneusement !
4. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale. Si $U = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, montrer : $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tU$.