Fonctions usuelles ; calculs d'intégrales (II)

EXERCICE 1 Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x.$$

EXERCICE 2 Etudier les fonctions suivantes (définition, régularité, représentation) :
- $x \mapsto \arccos(\cos x)$;
- $x \mapsto \cos(\arccos x)$;
- $x \mapsto \arccos(1-2x^2)$;
- $x \mapsto \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$;
- $x \mapsto \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$ (on pourra "poser" $x = \tan^2 t$ SEULEMENT après avoir donné un sens à cette phrase).

EXERCICE 3 Montrer les relations suivantes :
- $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239}$ (*"formule de Machin*[1]*")* ;
- $2\arctan x + 2\arctan y = \arcsin \dfrac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$ *(pour des valeurs de x à préciser).*

EXERCICE 4 Pour $x \neq 0$, que dire de $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$?

EXERCICE 5 Trouver les $x \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\arccos \frac{1-x}{1+x} + \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} = \pi.$$

EXERCICE 6

- $\displaystyle\int te^t \cos t \, dt$;
- $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \sin t \, dt$;
- $\displaystyle\int_{-1515}^{1515} t^{512} \sin(1024t) dt$;
- $\displaystyle\int t^3 \operatorname{ch} t \, dt$.

EXERCICE 7

- $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2-1)^2(t^2+t+1)^2}$;
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4-1}{(t^2+1)^2} dt$;

[1]OK, vous rigolez un bon coup et on passe à autre chose...

- $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+1)^7 - t^7 - 1}$;
- $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^2+3}{(t^2+1)(t-1)^3} dt$;
- $\displaystyle\int_0^{2} \frac{t^2+3}{(t^2+1)(t-1)^3} dt$·

EXERCICE 8

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+\tan x}$;
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\cos x}$;
- $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$;
- $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{5\,\mathrm{sh}\,x - 4\,\mathrm{ch}\,x}$;

EXERCICE 9

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$;
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$;
- $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$ (avec $a < b$) ;
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$·

EXERCICE 10 Calculer : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos x \ln(\cos x)\, dx$.