

Dérivation des fonctions numériques d'une variable réelle

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| 1 Résultats locaux | 2 |
| 1.1 Dérivée d'une fonction en un point | 2 |
| 1.2 Opérations sur les dérivées | 2 |
| 1.3 Dérivation des fonctions réciproques | 3 |
| 1.4 Fonctions usuelles | 4 |
| 1.5 Dérivées d'ordre ≥ 2 | 4 |
| 1.6 Extrema locaux des fonctions dérivables | 5 |
| 2 Résultats globaux | 5 |
| 2.1 Théorème de Rolle | 5 |
| 2.2 Théorème des accroissements finis | 5 |
| 2.3 Inégalités des accroissements finis | 6 |
| 2.4 Un théorème mal compris | 6 |
| 2.5 Dérivées et variations | 7 |
| 2.6 Retour sur les difféomorphismes (HP) | 8 |
| 3 Formules de Taylor - première couche | 8 |
| 3.1 Formule de Taylor avec reste intégral | 8 |
| 3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange | 9 |
| 3.3 Théorème de Taylor-Young | 9 |
| 4 Extension aux fonctions à valeurs complexes | 10 |
| 4.1 Généralités | 10 |
| 4.2 Ce qui reste vrai | 11 |
| 4.3 Ce qui ne l'est plus | 11 |
| 4.4 Théorème de relèvement | 11 |

1 Résultats locaux

La plupart des résultats des trois premiers paragraphes sont connus depuis la terminale. C'est l'occasion non pas de passer rapidement à la suite, mais de se mettre au point sur des notions élémentaires donc importantes.

1.1 Dérivée d'une fonction en un point

DÉFINITION 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs réelles, et $x_0 \in I$. On note p_{x_0} la fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par $p_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- Lorsque p_{x_0} admet une limite l en x_0 , on dit que f est dérivable en x_0 , de dérivée l , notée $f'(x_0)$.
- Lorsque p_{x_0} admet une limite à droite (resp. à gauche) l en x_0 , on dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 , de dérivée l , notée $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).

REMARQUES 1

- Si x_0 est à l'intérieur de I , il est clair que f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 , avec $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.
- Géométriquement, $f'(x_0)$ s'interprète comme la "pente limite" des sécantes (M_0M) du graphe de f lorsque x tend vers x_0 , où $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$ (dessin...). Si on note D la droite passant par M_0 et de pente $f'(x_0)$, "on voit bien" que le graphe Γ de f va "coller à D ". On dit que D est la tangente à Γ en M_0 .
- Lorsque f est dérivable à droite et à gauche, avec $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, Γ n'admet plus de tangente, mais deux "demi-tangentes" en $(x_0, f(x_0))$.
- On montrera sans mal que si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 , et on exhibera un contre-exemple pour la réciproque (résultat à comparer avec vos souvenirs de terminale...).
- La dérivabilité de f en x_0 est par définition équivalente à l'existence d'un DL à l'ordre 1 en x_0 (le vérifier tout de même...).
- On note parfois $\frac{d}{dx}f(x)$ à la place de $f'(x)$. Cette notation est toutefois dangereuse... et laissée provisoirement aux physiciens.

EXEMPLE 1 La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en tout point de \mathbb{R}^* , mais pas en 0.

Lorsque $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de I , $f'(x)$ est défini pour tout x . On peut donc voir f' comme une application de I dans \mathbb{R} . Notons dès maintenant que cette application, qu'on¹ note parfois $D(f)$, n'a aucune raison d'être elle-même dérivable, ou même continue.

1.2 Opérations sur les dérivées

PROPOSITION 1

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, et f et g sont dérivables en x_0 , alors $\lambda f + g$ également, de dérivée $\lambda f'(x_0) + g'(x_0)$ (on dit que la dérivation est linéaire).
- Si f et g sont dérivables en x_0 , alors fg également, de dérivée :

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

¹en particulier Maple

- Si f est dérivable en x_0 et $f(x_0) \neq 0$, on sait que $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de x_0 .
Cette fonction est alors dérivable en x_0 , de dérivée $-\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$.
- Si f est dérivable en x_0 et φ en $f(x_0)$, alors $\varphi \circ f$ est dérivable en x_0 , de dérivée $(\varphi \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\varphi'(f(x_0))$.

PREUVE : Le point de vue “développement limité” fournit des preuves spectaculairement efficaces et simples. . . ■

1.3 Dérivation des fonctions réciproques

On commencera par traiter soigneusement l'exercice suivant...

EXERCICE 1 Si f est un homéomorphisme dérivable, tel que $f'(x_0) = 0$, montrer que l'homéomorphisme réciproque n'est pas dérivable en $f(x_0)$.

DÉFINITION 2

Un *difféomorphisme* est une application dérivable, bijective, de bijection réciproque dérivable.

On a vu que si f est continue, bijective², définie sur un intervalle, alors la bijection réciproque est nécessairement continue. On va voir que l'existence d'une dérivée ne va pas de soi.

PROPOSITION 2 Soit f une application réalisant une bijection de I sur J , dérivable en $x_0 \in I$, avec $f'(x_0) \neq 0$. Alors la bijection réciproque $g = f^{-1}$ est dérivable en $f(x_0)$, de dérivée $\frac{1}{f'(x_0)}$.

PREUVE : Puisque g est continue en $y_0 = f(x_0)$, l'application $t : h \mapsto g(y_0 + h)$ est continue en 0, et on peut écrire en composant les limites :

$$\frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \frac{t(h) - t(0)}{f(t(h)) - f(t(0))} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x_0)}.$$

■

COROLLAIRE 1 Soit f une bijection dérivable en tout point d'un intervalle I sur J , de dérivée ne s'annulant pas ; alors f est un difféomorphisme, et sa réciproque g a pour dérivée $g' = \frac{1}{f' \circ g} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

REMARQUE 2 Pour *retenir* la formule, on peut dériver la relation $f \circ g = \text{Id}$. On obtient ainsi facilement la condition NECESSAIRE $f'(x_0) \neq 0$ (voir l'exercice 1).

EXEMPLE 2 $x \mapsto x^3 + x$ est un difféomorphisme de \mathbb{R} sur lui-même, alors que $x \mapsto x^3$ est une bijection dérivable de \mathbb{R} sur lui-même, qui n'est pas un difféomorphisme.

²cf le chapitre sur la continuité. En fait, l'hypothèse de bijectivité peut être remplacée par celle de stricte monotonie

1.4 Fonctions usuelles

- Si $n \in \mathbb{N}$, $f : t \mapsto t^n$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $f'(t) = nt^{n-1}$: le prouver par récurrence.
- On admet que les fonctions sin, cos et tan sont dérivables, de dérivées “ce que l’on sait”. Les fonctions arcsin et arccos (définies sur $[-1, 1]$) ne sont dérivables que sur $] -1, 1[$, de dérivées $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arccos' = -\arcsin'$. Cette relation n’a rien d’étonnant, puisque pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$. Pourquoi, au fait ?
- De même, la fonction arctan (qui établit une bijection continue de \mathbb{R} sur $] -\pi/2, \pi/2[$) est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$; il s’agit donc d’un difféomorphisme.
- On admet que la fonction exp est un difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* , se dérivant en lui-même, et on note ln sa fonction réciproque. La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ se dérive alors en $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- Si $a > 0$, l’application $x \mapsto a^x$ se dérive en $x \mapsto (\ln a)a^x$: il faut savoir montrer ce résultat... pour pouvoir le retrouver facilement et rapidement en cas de doute (légitime).

REMARQUE 3 Si f est dérivable et à valeurs strictement positives, $\ln f$ se dérive en $\frac{f'}{f}$ (dérivée d’une composée), alors que si f est à valeurs strictement négatives, $\ln(-f)$ se dérive en $\frac{-f'}{-f} = \frac{f'}{f}$. Cela explique la formule magique mais utile $(\ln |f|)' = \frac{f'}{f}$.

1.5 Dérivées d’ordre ≥ 2

DÉFINITION 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si $n \geq 2$, on dit que f est dérivable n fois sur I , et on note $f \in \mathcal{D}^n(I)$ lorsque f est dérivable $n - 1$ fois, de dérivée $(n - 1)$ -ième dérivable. Cette dérivée est alors notée $f^{(n)}$ ou $D^n(f)$ “dérivée n -ième de f ” (il s’agit d’une définition récursive... passons la dessus).
- f est dite de classe \mathcal{C}^n sur I lorsque $f \in \mathcal{D}^n(I)$, avec $f^{(n)}$ continue sur I . On note alors $f \in \mathcal{C}^n(I)$.
- f est dite de classe \mathcal{C}^∞ sur I lorsque $f \in \mathcal{C}^n(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en aucun cas il n’est question d’une “dérivée infinie”...). $\mathcal{C}^\infty(I)$ désigne l’ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

Il n’est pas difficile (récurrence) de montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{D}^n(I)$, alors $\lambda f + g \in \mathcal{D}^n(I)$, avec $D^n(\lambda f + g) = \lambda D^n(f) + D^n(g)$. Cette remarque et le résultat suivant montrent que $\mathcal{C}^n(I)$ est stable par combinaisons linéaires et produits. Quand on veut frimer, on parle alors d’une “algèbre” (comme pour $\mathbb{K}[X]$).

PROPOSITION 3 Formule de Leibniz

Soient $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Alors $fg \in \mathcal{C}^n(I)$, avec :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

PREUVE : Récurrence soignée (*ne pas se focaliser sur la formule : il faut justifier les dérivabilités !*). On pourra commencer par dériver 3-4 fois le produit fg , “pour voir ce qui se passe”. ■

EXERCICE 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $\varphi : x > 0 \mapsto x^{n-1}e^{-1/x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ , avec $\varphi^{(n)}(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^{n+1}}$.

1.6 Extrema locaux des fonctions dérivables

PROPOSITION 4 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en un point x_0 **intérieur** à I , et admettant un extremum local en x_0 . Alors $f'(x_0) = 0$.

PREUVE : On regarde le signe du rapport $\frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$ pour t positif proche de 0, puis on fait tendre t vers 0^+ . On fait ensuite la même chose à gauche. ■

REMARQUE 4 La condition selon laquelle x_0 est intérieur à I est tout à fait essentielle. La fonction $f : x \in [0, 1] \mapsto x$ admet par exemple un minimum global (donc local) en 0, et y est dérivable avec $f'(0) = 1$.

2 Résultats globaux

2.1 Théorème de Rolle

THÉORÈME 1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

PREUVE : Un dessin nous suggère de choisir pour c un point de $]a, b[$ en lequel f admet un extremum local. L*Il faut justifier l'existence d'un tel point : on traite d'abord le cas où f est constante, puis celui où il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) < f(a)$; on cherche alors un minimum global. . . ■

2.2 Théorème des accroissements finis

Le théorème suivant généralise le théorème de Rolle dans la mesure où on peut voir le second comme cas particulier du premier. En fait, on va montrer le cas général (TAF) à partir du cas particulier (Rolle).

THÉORÈME 2 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

PREUVE : Un dessin nous suggère de “redresser le graphe de f ”, en considérant la fonction $g : t \in [a, b] \mapsto f(t) - \varphi(t)$, où $\varphi(t) = f(a) + t \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Ainsi, le “taux d'accroissement” de la sécante passant par $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ est également la pente d'une tangente à la courbe (ce qui représente une “pente limite” de sécantes).

2.3 Inégalités des accroissements finis

On retrouve ici un résultat vu en terminale.

THÉORÈME 3 Soit I un *intervalle* et $f \in \mathcal{D}(I)$ telle que $|f'(t)| \leq K$ pour tout $t \in I$. Alors f est K -lipschitzienne sur I .

PREUVE : On fixe $a, b \in I$ tel que $a < b$, et on écrit le rapport $\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$ grâce au théorème des accroissements finis. ■

REMARQUES 5

- Dans l'énoncé, on pourrait se contenter d'une condition de la forme $f \in \mathcal{C}([a, b]) \cap \mathcal{D}(]a, b[)$, mais dans la pratique...
- Tout comme en terminale, la présence de valeurs absolues est essentielle : cf la fonction $x \mapsto -e^x$ pour laquelle il n'est pas compliqué de majorer la dérivée (par 1, 10, ou même 0), mais qui n'est pourtant pas lipschitzienne (pourquoi, au fait ?).
- Pour montrer que $f' = 0$ implique f constante, on pourra utiliser au choix l'inégalité ou le théorème des accroissements finis (cela dit, autant revenir au plus élémentaire, c'est-à-dire ici au théorème).

2.4 Un théorème mal compris

“- Oh ! Regarde ! Des sangliers domestiques !

- Non. Ce sont des cochons sauvages.”

Avant d'énoncer le prochain résultat, il convient de signaler que “prolonger une application dérivée” n'a *a priori* aucun sens... Le terme de “théorème de prolongement de la dérivée” que l'on trouvera souvent dans la littérature est donc très dangereux... Nous préfererons parler du “théorème de la limite de la dérivée”.

Il faut bien comprendre que “poser” $3 + 3 = 6$ ou “affirmer” $3 + 3 = 6$ sont deux démarches bien distinctes. Dans le premier cas, on semble définir 6 comme la somme de 3 et 3, ce qui est grotesque (pourquoi pas 1515 – 1509 ? En fait, 6 est le successeur de 5, mais c'est une autre histoire...). Dans le second cas, on se réserve la possibilité de prouver que 3 et 3 font 6³.

De même, “poser $f'(a) = l$ ” **EST GROTESQUE** : cela reviendrait en effet à “poser” $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} l$, ce qui n'a aucun sens.

EXERCICE 3 Montrer que l'application $f : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas dérivable en 0, bien que $f' :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ admette un prolongement continu sur $[0, 1]$.

Il se peut également qu'une application soit dérivable en tout point, mais que l'application dérivée ne soit pas continue :

EXERCICE 4 Montrer que l'application $f : \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$ est continue, dérivable sur \mathbb{R} , mais que f' n'est pas continue en 0.

³ce qui est effectivement possible : vos ancêtres (et les miens) faisaient parfois cela... en terminale!

THÉORÈME 4 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur $]a, b[$, continue en a , et telle que $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow a^+]{} l \in \mathbb{R}$. Alors f est dérivable en a , avec $f'(a) = l$, et f' est continue en a .

PREUVE : Evaluer le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ grâce au théorème des accroissements finis. ■

EXERCICE 5 (*difficile*)

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{sinon} \end{cases}$
 Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}

SOLUTION :

- f est clairement de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et $] - \infty, 0[$. La continuité en 0 s'établit par exemple en montrant que f admet en 0 une limite à gauche (...) et à droite, et que ces limites sont égales à $f(0)$.
- Pour montrer que f est dérivable en 0, on note déjà que f est dérivable à gauche, avec $f'_g(0) = 0$. Maintenant, $f_1 = f|_{\mathbb{R}_+}$ est continue, dérivable sur \mathbb{R}_+^* , avec $f'_1(t) = \frac{e^{-1/t}}{t^2}$ pour tout $t > 0$. Ainsi, f_1 est continue en 0 et $f'_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$, si bien que f est dérivable à droite en 0, avec $f'_d(0) = 0 = f'_g(0)$, puis f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. f' est donc continue en 0 puisque $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0 = f'(0)$ et $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{} 0 = f'(0)$. f est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- Considérons maintenant $g = f'$: g est continue en 0 et dérivable sur \mathbb{R}^* d'après ce qui précède. De plus, g est dérivable à gauche en 0, avec $g'_g(0) = 0$. $g_1 = g|_{\mathbb{R}_+}$ est continue, dérivable sur \mathbb{R}_+^* , avec $g'_1(t) = \left(-\frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^4}\right)e^{-1/t}$ pour tout $t > 0$. Ainsi, g_1 est continue en 0 et $g'_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$, si bien que g est dérivable à droite en 0, avec $g'_d(0) = 0 = g'_g(0)$, puis g est dérivable en 0, avec $g'(0) = 0$. g' est donc continue en 0 puisque $g'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0 = g'(0)$ et $g'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{} 0 = g'(0)$. f est donc de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
- On montre enfin que f est de classe \mathcal{C}^n par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. La proposition que l'on montrera pourra être de la forme : “ f est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} , $f^{(n)} = 0$ sur \mathbb{R}^- , et il existe une application polynômiale P_n telle que $f^{(n)}(t) = P_n(1/t)e^{-1/t}$ pour tout $t > 0$ ”.

REMARQUE 6 Pour terminer ce paragraphe, notons que le fait que f' n'admette pas de limite finie en a n'implique pas que f n'est pas dérivable en a (cf exercice 4). Cependant, on pourra montrer que si f est continue en a et $f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow a^+]{} +\infty$, alors f n'est pas dérivable en a .

2.5 Dérivées et variations

PROPOSITION 5 Soit $f \in \mathcal{C}(I)$ dérivable sur I (sauf éventuellement “aux bords”).

- Si $f' = 0$, alors f est constante.
- f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$
- f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ et l'ensemble $E = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ “est d'intérieur vide”, c'est-à-dire : ne contient pas d'intervalle non réduit à un singleton.

PREUVE : Appliquer le théorème des accroissements finis dès qu'il apparaît une pente! ■

REMARQUE 7 Si E est fini, alors E est d'intérieur vide. On retrouve alors le résultat énoncé en terminale, qui est plus faible, mais en fait largement suffisant "pour tous les jours".

2.6 Retour sur les difféomorphismes (HP)

DÉFINITION 4

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Un \mathcal{C}^k -difféomorphisme est une bijection de classe \mathcal{C}^k dont la réciproque est de classe \mathcal{C}^k .

On combinant les différents résultats de ce chapitre, on arrive à une caractérisation "minimaliste" des \mathcal{C}^k -difféomorphismes sur un intervalle :

PROPOSITION 6 Soient I un intervalle et $k \in \mathbb{N}^*$. Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme si et seulement si elle est de classe \mathcal{C}^k et sa dérivée ne s'annule pas.

PREUVE : Les conditions données sont clairement (quoique...) nécessaires. Pour montrer qu'elles sont suffisantes, on pourra utiliser le TVI (qui nous assure que f' reste de signe strict constant), la proposition 5 et le corollaire de la proposition 2 ■

3 Formules de Taylor - première couche

On va maintenant prouver la correction des développements limités donnés dans les chapitres précédents.

Les formules de Taylor ont pour objet l'approximation d'une fonction par un "polynôme de Taylor", généralisant l'approximation d'un graphe par la tangente. Si f est dérivable n fois en x_0 ($n \geq 1$), on définit le "polynôme de Taylor de f en x_0 d'ordre n " (ouf!) par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

et le reste associé : $R_{n,f,x_0}(x) = f(x) - T_{n,f,x_0}(x)$ (il ne s'agit en général pas d'un polynôme).

Les formules de Taylor fournissent diverses informations sur le reste.

3.1 Formule de Taylor avec reste intégral

PROPOSITION 7 Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, avec $a, b \in I$. Alors :

$$f(b) = \left(f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k \right) + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t) (b - t)^n dt.$$

PREUVE : Récurrence : pour $n = 0$, c'est le "théorème fondamental du calcul différentiel/intégral" qu'on verra dans le chapitre suivant. Pour passer de n à $n + 1$, c'est une simple IPP. ■

REMARQUES 8

- Cette formule est à connaître dès maintenant. On s'en servira pour montrer tous les autres taylorismes.

- On peut déduire de ce résultat le très ancien (et HP) “théorème de Taylor-Lagrange”, qui généralise le théorème des accroissements finis : Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n ($n \in \mathbb{N}$) sur un intervalle $[a, b]$, et dérivable $n + 1$ fois sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \left(f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

On verra dans les exercices une “preuve magique”. Dans le cas où $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, la FTRI est suffisante : on encadre soigneusement l’intégrale en utilisant le maximum et le minimum de $f^{(n+1)}$ (justifier!), et on utilise enfin le théorème des valeurs intermédiaires à $f^{(n+1)}$.

- Le théorème de Taylor-Lagrange donne simplement l’existence de c : il ne dit rien sur sa position dans $]a, b[$, si bien que lorsque $f^{(n+1)}$ “varie fortement” sur $]a, b[$, l’information donnée par le théorème de Taylor-Lagrange est peu intéressante. Dans la pratique, il peut presque systématiquement être remplacé par la formule de Taylor avec reste intégral, dès que la régularité de la fonction le permet, ce qui est presque toujours le cas “dans la vraie vie”.

3.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Le résultat suivant ressemble fortement à l’IAF : c’est une généralisation.

THÉORÈME 5 Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ telle que $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors :

$$\left| f(b) - \left(f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

PREUVE : Majorer (non subtilement) le reste dans la FTRI. ■

REMARQUE 9 En finissant, on peut affaiblir les hypothèses, en prenant f de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$ et \mathcal{D}^{n+1} sur $]a, b[$ (comme pour le TAF...)

EXERCICE 6 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.

EXERCICE 7 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu’il existe $a \in]0, 1[$ tel que $|f''(a)| \geq 4$.

3.3 Théorème de Taylor-Young

Le résultat suivant fournit des DLs dans la plupart des cas usuels.

THÉORÈME 6 Soit f de classe \mathcal{C}^n au voisinage de x_0 . Alors :

$$f(x) - \left(f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \right) = o_{x_0}((x-x_0)^n).$$

PREUVE : On peut utiliser la FTRI, ou bien l’inégalité de Taylor-Lagrange, et la continuité de $f^{(n)}$ en x_0 . Cela dit, difficile d’échapper à un (petit) ε ... ■

REMARQUE 10 Utilisé seul, le théorème de Taylor-Young ne permettra JAMAIS d'avoir une inégalité GLOBALE...

COROLLAIRE 2 Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$ et $x_0 \in I$, alors f admet un DL en x_0 à l'ordre n .

REMARQUE 11 ATTENTION, la réciproque de ce théorème est fautive : un contre-exemple spectaculaire⁴ sera vu en exercice. Par contre, la *dérivabilité* de f reste *équivalente* à l'existence d'un DL à l'ordre 1.

COROLLAIRE 3 Si $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ et $x_0 \in I$, alors f admet un DL en x_0 à tout ordre.

EXERCICE 8 Retrouver quelques-uns des DLs des fonctions usuelles donnés dans le chapitre sur les fonctions continues.

4 Extension aux fonctions à valeurs complexes

On s'intéresse maintenant à des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . Fondamentalement, l'étude d'une telle fonction se ramène à l'étude de ses parties réelle et imaginaire.

4.1 Généralités

DÉFINITION 5

D désigne encore un domaine de \mathbb{R} .

- Soient $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ et x_0 "au bord de D ". On dit que f tend vers $Z \in \mathbb{C}$ en x_0 lorsque $|f(t) - Z| \xrightarrow[t \rightarrow x_0]{} 0$. On note alors $f \xrightarrow[x_0]{} Z$.
- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ sera dite *continue* en $x_0 \in D$ lorsqu'elle admet une limite en x_0 (qui est alors nécessairement $f(x_0)$...)
- $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *dérivable* en $x_0 \in D$ lorsque $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite $l \in \mathbb{C}$ quand x tend vers x_0 . On note alors $f'(x_0) = l$.
- $\mathcal{D}^k(D, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{C})$ désignent "ce que l'on pense".

Le fait suivant est tout-à-fait crucial (comme pour le passage des suites réelles aux suites complexes) :

PROPOSITION 8 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. On peut écrire $f = f_1 + if_2$ avec $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$. On a alors $f \xrightarrow[x_0]{} Z$ si et seulement si $f_1 \xrightarrow[x_0]{} \operatorname{Re} Z$ et $f_2 \xrightarrow[x_0]{} \operatorname{Im} Z$.

On en déduit rapidement la :

PROPOSITION 9

- $f = f_1 + if_2$ est continue en x_0 si et seulement si f_1 et f_2 le sont.
- $f = f_1 + if_2$ est dérivable en x_0 si et seulement si f_1 et f_2 le sont. On a alors $f'(x_0) = f_1'(x_0) + if_2'(x_0)$.

⁴une fonction admettant un DL à l'ordre 1515, mais dérivable une seule fois en 0

4.2 Ce qui reste vrai

De la proposition 9, on déduit facilement les résultats suivants :

PROPOSITION 10

- Si f et g sont dérivables en x_0 et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda f + g$ et fg le sont également, de dérivée ce que l'on peut espérer. . .
- La formule de Leibniz s'étend à $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$.
- Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sont dérivables, alors $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{C}$ également, avec $(g \circ f)' = f'.g' \circ f$.
- $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ et $(t^z)' = z t^{z-1}$ (par définition, $t^z = e^{z \ln t}$ lorsque $t > 0$).

PROPOSITION 11 Les résultats suivants restent valables :

- La formule de Taylor avec reste intégral.
- L'inégalité des accroissements finis et celle de Taylor-Lagrange (qui s'en déduisent), ainsi que le théorème de Taylor-Young.
- $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ est constante si et seulement si $f' = 0$.

REMARQUE 12 En exercice, on montrera de façon élémentaire ce dernier résultat.

4.3 Ce qui ne l'est plus

Fondamentalement, les conclusions de la forme "il existe $c \in I$ tel que $g(c) = 0$ ", à savoir le théorème de Rolle, et son copain le TAF (et accessoirement celui de Taylor-Lagrange), ne passent pas de \mathbb{R} à \mathbb{C} . En effet, on trouve c_1 tel que $\operatorname{Re} g(c_1) = 0$ et c_2 tel que $\operatorname{Im} g(c_2) = 0$, mais rien n'impose $c_1 = c_2$. . .

EXEMPLE 3 La fonction $f : t \in [0, 1] \mapsto e^{it}$ est de classe \mathcal{C}^1 , vérifie $f(0) = f(1)$, mais sa dérivée ne s'annule pas.

4.4 Théorème de relèvement

On termine ce chapitre par un résultat "à la frontière du programme" (utilisé rarement, et en général rappelé dans un éventuel énoncé l'utilisant). Il s'agit, en somme, de paramétrer "en polaire" (ρ et θ en fonction de t) une courbe ne passant pas par l'origine (le pôle), à partir d'une paramétrisation cartésienne (x, y en fonction de t).

Si $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ sont de classe \mathcal{C}^k , l'application $t \mapsto \rho(t)e^{i\theta(t)}$ est de classe \mathcal{C}^k de I dans \mathbb{C}^* . Mais réciproquement, si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$, peut-on trouver $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe \mathcal{C}^k telles que $f = \rho e^{i\theta}$?

Une condition nécessaire est bien-entendu que f ne s'annule pas. Dans ce cas, pour tout $t \in I$, on peut trouver $\rho(t) > 0$ et $\theta(t)$ tels que $f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$. Pour ρ , on a nécessairement $\rho(t) = |f(t)|$, donc ρ est \mathcal{C}^k (exercice peut-être pas si évident !). Le problème, c'est qu'on a beaucoup de possibilités pour chaque $\theta(t)$. On peut penser qu'en prenant les $\theta(t)$ au hasard parmi les différents possibilités, il y a peu de chances pour qu'on obtienne une fonction θ ne serait-ce que continue. . .

PROPOSITION 12 Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C}^*)$ ($k \geq 0$). Alors il existe $\rho \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}_+^*)$ et $\theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ telles que $f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in I$.

Il y a de plus unicité de ρ , mais si θ_0 est une solution, les autres solutions sont les fonctions de la forme $\theta_0 + 2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

PREUVE : (HP) On propose une preuve sur la feuille de TD, basée sur des relèvements locaux \mathcal{C}^∞ de l'exponentielle. ■

BIEN ENTENDU, on ne parlera pas d'une mystérieuse fonction \ln qui serait définie sur \mathbb{C}^* . Ou alors, on essaiera de la définir, et on verra qu'on a quelques soucis de régularité au voisinage de -1 ...