Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

1 Topologie

EXERCICE 1 *Bolzano-Weierstraß*

1. Montrer que de toute suite bornée de $\mathbb{R}^2$, on peut extraire une sous-suite convergente.
2. Application : montrer que toute fonction continue définie sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles admet un maximum et un minimum (et est en particulier bornée).

EXERCICE 2 (*) *Un TVI*

Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, et $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si y est compris entre $f(X_1)$ et $f(X_2)$, alors il existe $X_3 \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = f(X_3)$.
On se ramènera à une fonction continue sur $[0, 1]$*...*
Montrer que le résultat est maintenu si f est seulement définie sur un disque ou "un haricot". Montrer qu'il ne l'est plus dans le cas général.

EXERCICE 3 Que dire d'une réunon finie de fermés ? et d'une réunion quelconque ? et pour des ouverts ? et pour l'intersection ?

EXERCICE 4 (*)

1. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout point $x \in \mathbb{R}^2$, la distance de x à F, définie par $d(x, F) = \operatorname*{Inf}_{y \in F} d(x, y)$, est en fait un minimum, puis que l'application $x \mapsto d(x, F)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ *(on pourra montrer qu'elle est* 1*-lipschitzienne).*
2. Réciproquement, soit E une partie de $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $d(x, E)$ est atteinte. Montrer que E est fermée.

EXERCICE 5 (*) *"Clopen sets"*

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ qui est ouverte et fermée[1]. On se propose de montrer que $A = \mathbb{R}^2$. On fixe $x_0 \in A$ et $y \in \mathbb{R}^2$, et on pose :

$$E = \left\{ T \in [0, 1] \;\middle|\; \forall t \in [0, T],\ x_t \in A \right\}$$

avec $x_t = x_0 + t(y - x)$.

1. Montrer que E est un intervalle de $[0, 1]$ contenant 0. *On note* $\alpha = \operatorname{Sup} E$ *dans la suite.*
2. Montrer que α est en fait le maximum de E.
3. Montrer que $\alpha = 1$ et conclure.

2 Fonctions continues, de classe $\mathcal{C}^1$...

EXERCICE 6

1. Montrer que toute application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne (donc continue).
2. (*) Déterminer une norme sur $\mathbb{R}[X]$, puis donner une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ linéaire et discontinue en 0 *(ne pas chercher trop loin !)*

EXERCICE 7 Etudier la continuité et l'existence de dérivées partielles (à calculer le cas échéant !) pour les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

[1] Si vous voulez finir de convaincre quelqu'un que les matheux vivent sur une autre planète, faites leur lire cette phrase...

1. $(x,y) \mapsto \mathrm{Max}(x,y)$; $(x,y) \mapsto \mathrm{Min}(|x|,|y|)$;
2. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^6+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $(x,y) \mapsto \sqrt{|x|+|y|}$;
4. $(x,y) \mapsto \ln(1+\sqrt{x^2+y^2})$.

EXERCICE 8 (*)
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ de gradient nul. Que dire de f ?
On commencera par le cas $\Omega = \mathbb{R}^2$, puis celui où Ω est un disque, puis la réunion de deux disques disjoints...
Quelle genre de propriété (pour Ω) semble pertinente ?

EXERCICE 9

1. Soit $P \in \mathbb{R}^2$ (assimilé au plan $\mathcal{P}$...) et $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbb{R},\ M \mapsto PM^2$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer son gradient.
   On donnera une version "coordonnées" et une version "développement limité" avant de constater que la seconde est bien meilleure !
2. Soient $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $M_1, ..., M_n \in \mathcal{P}$ Calculer le gradient de $\varphi : M \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i PM_i^2$. Vérifier que c'est le gradient d'une foction plus simple, et retrouver ainsi la nature des lignes de niveau de φ.

EXERCICE 10 Déterminer les points critiques et extrema locaux/globaux des applications :

1. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4+x^5+y^4$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2+x^{19}-y^2$;
2. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^{17}+y^{17}$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^{19}-y^{16}+y^{512}$;
3. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sin(x^2+y^2)$;
4. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2y^2-x^2-y^2+1$;
5. $(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \mapsto x^y$.

EXERCICE 11 (*)
Déterminer le maximum des xyz, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $x+y+z=1$, avec $0 \leq x,y,z \leq 1$.
On se ramènera à une fonction continue sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$...

EXERCICE 12 Résoudre les trois équations aux dérivées partielles suivantes, en effectuant les changements de variables proposés :

1. $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (chercher une solution sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$ par un passage en polaire).
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)$ (considérer $u = x - ct$ et $y = v - ct$).
3. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{x}$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ (passer en coordonnés polaires).

EXERCICE 13

1. Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, à symétrie radiale par rapport à l'origine, et de laplacien nul.
2. Même chose pour les fonctions invariantes par retournement autour de l'axe (Ox).