Algèbre des polynômes

Comme d'habitude, on consultera avantageusement la feuille de travail Maple jointe.

1 Introduction à l'algèbre linéaire

Exercice 1 Les ensembles suivants sont-ils des sev de $\mathbb{R}^2$?

$$\{(x,y)\mid |x|=|y|\},\ \{(x,y)\mid x\geq y\},\ \{(x,y)\mid 2x=-3y\}.$$

Exercice 2 Dire si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

1. ensemble des fonctions à valeurs positives (≥ 0) ;
2. ensemble des fonctions ne changeant pas de signe ;
3. ensemble des fonctions décroissantes ;
4. ensemble des fonctions monotones ;
5. ensemble des f telles que $f(t)\underset{t\to 1515}{\longrightarrow}0$;
6. ensemble des f telles que $f(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}1515$;
7. ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^{12}$, c'est-à-dire dérivables 12 fois de dérivée douzième continue.

Exercice 3 Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel est-il un sev ?

Exercice 4 Soient F_1 et F_2 deux sous-espace vectoriel de E. Montrer que $F_1\cup F_2$ est un sous-espace de E si et seulement si $E_1\subset E_2$ ou $E_2\subset E_1$.

Exercice 5 Etudier la linéarité des applications suivantes ; déterminer (le cas échéant !) leur image et leur noyau :

1. $u_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(2x-y^2,x+y,y)$;
2. $u_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ (x,y,z)\mapsto(x,x)$;
3. $u_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(2x-y,x+\cos y,y)$;
4. $u_4:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\mapsto(x,z,y)$;
5. $u_5:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\mapsto(x,\frac{y+z}{2},\frac{y+z}{2})$

Exercice 6 Montrer (u et v sont comme il faut... c'est-à-dire compatibles avec l'existence de $v\circ u$: le lecteur commencera par préciser ce point) :

$$\ker u=\ker v\circ u\quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{Im} u\cap\ker v=\{0\}.$$

Exercice 7 Que dire des familles suivantes (génératrices, libres, bases) ?

1. $E=\mathbb{R}^2$, $u=(1,2)$, $v=(-1,3)$, $w=(2,-1)$: famille (u,v,w).
2. $E=\mathbb{R}^3$, $u=(3,2,1)$, $v=(-6,-4,3)$: famille (u,v).
3. (*) $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de réels distincts ; pour $n\in\mathbb{N}$, f_n désigne l'application $x\mapsto|x-x_n|$: famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8

- Soient u,v deux vecteurs de E. Montrer que la famille (u,v) est liée si et seulement si $v=0$ ou $u=\lambda v$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{K}$.
- Donner un exemple de famille de trois vecteurs (y_1,y_2,y_3) liée bien que les familles (y_1,y_2), (y_1,y_3) et (y_2,y_3) soient libres.

2 Généralités sur les polynômes

Exercice 9 Quels sont les degrés et coefficients dominants des polynômes suivants ?

$$(X+1)^n-(X-1)^n,\ (X^2+1)^n-(X^2-1)^n.$$

Exercice 10 Soient $P=a_0+\cdots+a_nX^n$ et $x_0\in\mathbb{C}$. On définit par récurrence les complexes $(q_k)_{0\le k\le n}$ par : $q_0=a_n$, et $q_{k+1}=q_kx_0+a_{n-k-1}$. Montrer que l'on a : $q_n=P(x_0)$. Il s'agit de la méthode de Hörner, utilisée en informatique pour évaluer les polynômes avec un minimum de calculs : justifier !

Exercice 11 (*)

Soient $P_0,P_1,\dots,P_n\in\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg P_i=i$ pour tout $i\in[\![0,n]\!]$ (on dit que la famille $(P_i)_{0\le i\le n}$ est *échelonnée en degré*). Montrer qu'ils constituent une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

On montrera que c'est une famille libre et génératrice. Plus tard, on verra que dans ce type de situation ("dimension finie"), il suffit de montrer la liberté...

Exercice 12 Polynomes de Tchebichev de première et seconde espèce.

1. Si $n\in\mathbb{N}$, montrer qu'existent T_n et U_n dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que pout tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos nx=T_n(\cos x)$ et $\sin(n+1)x=\sin xU_n(\cos x)$. On pourra raisonner par récurrence, et trouver T_{n+1} et U_n à partir de T_n et U_{n-1}, ou encore (comme Maple) T_n (resp. U_n) à partir de T_{n-1} et T_{n-2} (resp. U_{n-1} et U_{n-2}).
2. Calculer T_4 et U_4, puis déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n et U_n.
3. Montrer que les coefficients de T_n et U_n sont entiers.
4. Quelles sont les racines des T_n et U_n ?

Exercice 13 Effectuer la division euclidienne de $X^6-4X^3+2X^2-1$ par X^2+4.

Exercice 14 Effectuer la division euclidienne de $4X^3+X^2$ par $X+1+i$.

Exercice 15 Déterminer le reste de la division euclidienne de $P\in\mathbb{K}[X]$ par $(X-a)(X-b)$, avec $a,b\in\mathbb{K}$ distincts.

Exercice 16 A quelle condition sur $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $B=X^2+X+1$ divise-t-il $A=X^4+aX^2+bX+c$?

Exercice 17 Montrer que $X^n\sin\theta-X\sin(n\theta)+\sin(n-1)\theta\in\mathbb{C}[X]$ est divisible par $X^2-2X\cos\theta+1$.

Exercice 18 (*)

Soient A et B sont deux polynômes réels à coefficients entiers avec B unitaire. Montrer que le reste et le quotient dans la division euclidienne de A par B sont à coefficients entiers.

Exercice 19 Polynômes d'interpolation de Lagrange.

Soient $x_1,\dots,x_{n+1}$ $n+1$ éléments distincts de $\mathbb{K}$, et $(y_1,\dots,y_{n+1})\in\mathbb{K}^{n+1}$.

Montrer qu'il existe un unique $L\in\mathbb{K}_n[X]$ tel que $L(x_i)=y_i$ pour tout $i\in[\![1,n+1]\!]$.

3 Dérivation

Exercice 20 Reprendre l'exercice 15 avec cette fois $a=b$.

Exercice 21 On considère le polynôme $P=X^3+pX+q$. Montrer que P admet une racine double (ou triple) si et seulement si $4p^3+27q^2=0$.

Dans le cas général, discuter le nombre de racines réelles de P.

Exercice 22 Soit P un polynôme de degré n. Montrer que la famille $(P, P', P'', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On pourra utiliser l'exercice 11.

Exercice 23 Donner l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans les polynomes suivants :

1. $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$;
2. $X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$.

Exercice 24 (*)
Trouver les polynômes P vérifiant $18P = P'P''$, puis ceux vérifiant $19P = P'P''$.

4 Factorisation

Exercice 25 Factoriser $16X^5 - 20X^3 + 5X - 1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, sachant qu'il admet une racine double.

Exercice 26 Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$: $X^8 - 1$ et $X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 27 (*)
Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrer : $P = Q = R = 0$.
Le résultat reste-t-il vrai si $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$?

Exercice 28 (*)
Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant respectivement :

1. $P(X^2) = P(X)^2$.
2. $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Dans les deux cas, on cherchera les racines possibles *de P.*

Exercice 29 Factoriser $(X+i)^n - (X-i)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On distinguera les cas où n est pair ou impair.
En déduire une expression de $\displaystyle\prod_{k=1}^{m} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2m+1}$ si $m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 30 (**)
Soit $P = X^3 - 4X^2 + 2X - 1$. Montrer que P admet trois racines complexes distinctes, dont une seule est réelle. On les note x_1, x_2 et x_3.
Calculer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ puis $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ sans calculer les x_i.

On trouvera comme Maple 12 *et* 43.
Indication : évaluer $(x_1+x_2+x_3)^2$ et $(x_1+x_2+x_3)^3$.

Exercice 31 (*) *Classique taupinal*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{P}(t) \geq 0$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = Q^2 + R^2$.

1. Montrer que les (éventuelles) racines réelles de P sont de multiplicité paire.
2. Montrer que si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est racine de multiplicité α, alors il en est de même pour $\overline{z}$.
3. Si A et B sont deux polynômes réels, que dire de $(A+iB)(A-iB)$?
4. A vous de jouer !