Décomposition des fractions rationnelles

Il s'agit de l'une des feuilles lesplus maigres de l'année : d'autres fractions arriveront naturellement dans les calculs d'intégrales et primitives.

Exercice 1 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les fractions suivantes :

1. $\dfrac{1}{X^4+1}$, $\dfrac{1}{X^4-1}$;
2. $\dfrac{1}{1+X+X^2}$, $\dfrac{1}{X^8-1}$ et $\dfrac{1}{X^n-1}$;
3. $\dfrac{1}{X^2-2\cos\theta X+1}$.

Exercice 2 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions suivantes :

1. $\dfrac{1}{(X^2-1)(X^2+1)^2}$ (utiliser la parité pour réduire les calculs) ;
2. $\dfrac{1}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2}$;
3. $\dfrac{n!}{\prod_{k=1}^{n}(X+k)}$;
4. $\dfrac{X^5+2}{(X^2+X+1)^3}$ (faire la division euclidienne de X^5+2 par X^2+X+1).

Exercice 3 Soit T_n le n-ème polynôme de Tchebichev. Décomposer $\dfrac{1}{T_n}$.

Exercice 4 (*)

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. En considérant $\dfrac{P'}{P}$, montrer que les racines de P' sont incluses dans l'enveloppe convexe des racines de P, c'est-à dire sont des barycentres "à coefficients positifs" de ces dernières.
On pourra établir une relation de la forme

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(z-z_k)=0,$$

où les λ_k sont des réels positifs, z est une racine de P', et les z_k sont les racines de P.

Exercice 5 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ $\dfrac{X^2+X+1}{(X^2-1)(X^2+1)}$ et $\dfrac{X}{X^4+X^2+1}$.