843 - le 23 Janvier 2010 **DS 6 - 4 heures**

Le cours est noté sur six points. Chacun devra y consacrer au moins une heure, sauf à me convaincre qu'il a traité intégralement cette partie.

1 Presque du cours

1. Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Soient u et v deux applications linéaires (entre des espaces à préciser, patatoïdes à l'appui). Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v \circ u$ si et seulement si $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0_F\}$.
3. Soient E et F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, et $(e_1, ..., e_n)$ une famille libre de E. Montrer que si u est injective, alors $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est libre dans F. Montrer ensuite qu'on ne peut pas se passer de la condition d'injectivité.
4. Montrer que lorsqu'une famille est liée, l'un des vecteurs de la famille peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres. Montrer également la réciproque.

2 Un prolongement $\mathcal{C}^1$

Montrer que l'application $f : x \in]0,1] \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{\sin x}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer ensuite que le prolongement (qu'on pourra encore noter f) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

3 Jouons dans $\mathbb{R}^4$

1. On s'intéresse aux cinq vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$\overrightarrow{f_1} = (1,2,3,4); \qquad \overrightarrow{f_2} = (-1,-1,2,3); \qquad \overrightarrow{f_3} = (1,1,1,2);$$
$$\overrightarrow{f_4} = (3,5,16,25); \qquad \overrightarrow{f_5} = (-1,-2,-1,-2).$$

   (a) La famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{f_4}, \overrightarrow{f_5})$ est-elle génératrice ?

   (b) $\mathcal{F}$ est-elle libre ?

2. On définit l'application

$$f \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+y+2z+t, 2x+2y+4z+2t, x+y-3z+16t, 3x+3y+z+18t) \end{array} \right.$$

   (a) Vérifier que f est linéaire.

   (b) Donner une base de $\operatorname{Ker} f$.

   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante simple (sans quantificateur...) sur $(X,Y,Z,T) \in \mathbb{R}^4$ pour avoir $(X,Y,Z,T) \in \operatorname{Im} f$. En déduire la valeur de $\operatorname{Im} f$, puis une base de ce dernier.

   (d) Donner une application linéaire φ_1 telle que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} \varphi_1$, et une application linéaire φ_2 telle que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} \varphi_2$.

   (e) Déterminer $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.

4 Polynômes konpadnom

Dans cet exercice, n désigne un entier strictement positif.

1. (a) En considérant $((1-X)+X)^{2n-1}$, montrer l'existence de deux polynômes $F_n, G_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que $(1-X)^n F_n + X^n G_n = 1$.

   (b) Si $(1-X)^n A = X^n B$ avec $A, B \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer que $A = B = 0$. *On pourra s'intéresser à la multiplicité de la racine 0...*

   (c) En déduire l'unicité de F_n et G_n dans la première question.

   (d) Écrire une fonction `maple` prenant en entrée n et calculant F_n.

   (e) Calculer F_n et G_n pour $n \in \{1,2,3\}$.

   (f) Montrer que[1] $F_n(1-X) = G_n$.

   (g) Calculer $F_n(0)$, $F_n(1)$ et $F_n(1/2)$.

2. (a) Montrer : $nF_n - (1-X)F_n' = KX^{n-1}$, où K est un réel qu'on n'explicitera pas.
   On pourra dériver la relation définissant F_n, et s'inspirer de la question 1b.

   (b) On fixe $n \geq 1$ et on écrit $F_n = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$.

      i. Que vaut a_0 ?

      ii. On suppose ici : $n \geq 2$. Que vaut le coefficient constant dans le membre de gauche de l'équation différentielle vue à la question précédente ? En déduire la valeur de a_1.

      iii. Obtenir ensuite une relation reliant a_k et a_{k+1}, pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$.

      iv. Montrer que a_k vaut... un coefficient binomial à déterminer !

[1] et la réponse à votre question est : « à votre avis ? »