1 Du cours

1. PROPOSITION 1 *Si* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_1 \in \mathbb{R}$ *et* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_2 \in \mathbb{R}$, *alors* $l_1 = l_2$.

   PREUVE : Supposons $l_1 \neq l_2$. On a par exemple $l_1 < l_2$. Prenons $\varepsilon = \dfrac{l_2 - l_1}{3}$ pour séparer deux voisinages autour de l_1 et l_2 :

   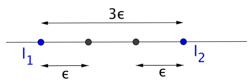

   FIG. 1 – On ne sort pas ε du chapeau

   Il existe un rang N_1 au delà duquel $|u_n - l_1| \leq \varepsilon$ et un rang N_2 au delà duquel $|u_n - l_2| \leq \varepsilon$. Pour $n = \mathrm{Max}(N_1, N_2)$, on aura alors :

   $$u_n \leq l_1 + \varepsilon < l_2 - \varepsilon \leq u_n,$$

   donc $u_n < u_n$: c'est absurde. ■

2. On veut montrer que pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un rang au delà duquel $u_n + v_n \leq M$.
   Fixons donc $M \in \mathbb{R}$. Il existe un rang N_1 au delà duquel $u_n \leq M - 844$. Par ailleurs, il existe un rang N_2 au delà duquel $(842 \leq) v_n \leq 844$. On aura alors pour tout $n \geq \mathrm{Max}(N_1, N_2)$: $u_n + v_n \leq (M - 844) + 844 = M$. ■

3. Soit u une suite croissante.
   - Si u est majorée, notons l la borne supérieure de l'ensemble non-vide majoré $E = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
     On va montrer que u converge vers l, c'est-à-dire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang au delà duquel $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$.
     D'une part, tous les u_n sont majorés par l (puisque l est un majorant de E). Mais d'autre part, si on fixe $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ n'est plus un majorant de u, donc il existe N_0 tel que $l - \varepsilon < u_{N_0}$. On aura alors, par croissance de u : pour tout $n \geq N_0$:

     $$l - \varepsilon < u_{N_0} \leq u_n \leq l < l + \varepsilon,$$

     et c'est gagné.
   - Sinon : u n'est pas majorée, et on va montrer que u diverge vers $+\infty$. Fixons pour cela $M \in \mathbb{R}$. Ce n'est pas un majorant de la suite, donc il existe un terme de cette suite, disons u_{N_0}, qui est supérieur à M. On a alors par croissance de u : pour tout $n \geq N_0$, $u_n \geq u_{N_0} \geq M$. ■

4. PROPOSITION 2 *Soient f et g deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$, telles que $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t > 0$ (ou au moins : pour t assez proche de 0). On suppose que ces fonctions convergent respectivement vers l_1 et l_2 en 0.*
   On a alors : $l_1 \leq l_2$.
   PREUVE : Par l'absurde : supposons $l_1 > l_2$. On prend alors $\varepsilon = \dfrac{l_1 - l_2}{3}$:

   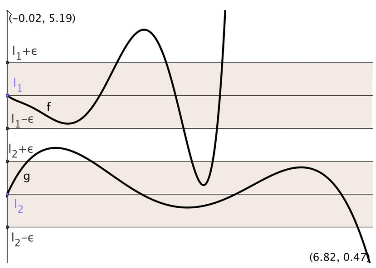

   FIG. 2 – On choisit à nouveau ε « pas tout à fait au hasard »

Il existe α_1 (resp. α_2) tel que pour tout $t \in]0, \alpha_1]$ (resp. $t \in]0, \alpha_2]$), $|f(t) - l_1| \leq \varepsilon$ (resp. $|g(t) - l_2| \leq \varepsilon$). On a alors en prenant $t_0 = \mathrm{Min}(\alpha_1, \alpha_2)$:

$$g(t_0) \leq l_2 + \varepsilon < l_1 - \varepsilon \leq f(t),$$

ce qui nous fournit l'inégalité $g(t) < f(t)$, qui est absurde. ■

2 As usual

1. On a par définition :

$$\begin{aligned}
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} == \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^{-1} \\
&= x\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x\Bigg(1 + \underbrace{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)}_{-\frac{1}{3}} x^2 + o(x^3)\Bigg) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Et pour le sinus hyperbolique :

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \sim \frac{\mathrm{e}^x}{2}.$$

2. Le dénominateur est plus simple ; commençons par lui, en notant que $\tanh x \sim x$ et :

$$3^x - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{x \ln 3} - \mathrm{e}^x = 1 - x\ln 3 + o(x) - (1 + x + o(x)) = (\ln 3 - 1)\, x + o(x) \sim (\ln 3 - 1)\, x,$$

de sorte que le dénominateur de notre expression est équivalent à $(\ln 3 - 1)\, x^2$.
Pour le numérateur, on voit instantanément qu'il tend vers 0, et un peu moins instantanément (voire pas du tout) que les termes d'ordre 1 apportés par $\mathrm{e}^{\sinh x}$ et $\ln(1 + \tan x)$ vont se compenser, donc on calcule à l'ordre 2 :

$$\mathrm{e}^{\sinh x} = \mathrm{e}^{x + o(x^2)} = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, et enfin :

$$\ln(1 + \tan x) = \ln\left(1 + x + o(x^2)\right) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

donc le numérateur est équivalent à $\dfrac{3x^2}{2}$, et l'expression globale à $\dfrac{\frac{3x^2}{2}}{(\ln 3 - 1)\, x^2}$, donc :

$$\frac{\mathrm{e}^{\sinh x} - \cos x - \ln(1 + \tan x)}{(3^x - \mathrm{e}^x)\tanh x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{3}{2\,(\ln 3 - 1)}.$$

3. Le terme dont on prend la racine quatrième tend vers 1, donc nous avons une expression de la forme $\varphi(x) = (1 + u)^{1/4} - 1$, avec u qui tend vers 0. On a donc $\varphi(x) \sim \dfrac{u}{4}\cdot$ Il reste à évaluer u, donc à faire un DL de $\dfrac{1 + 2x + 2x^2}{1 + 2x + 3x^2}$ à l'ordre... mais à quel ordre au fait ? en fait, au premier qui donnera un terme non nul au delà de la constante 1. On peut voir rapidement que le terme d'ordre 1 va s'annuler. J'en vois qui râlent, donc faisons le calcul :

$$\frac{1 + 2x + 2x^2}{1 + 2x + 3x^2} = (1 + 2x + o(x))\,(1 + 2x + o(x))^{-1} = (1 + 2x + o(x))\,(1 - 2x + o(x)) = 1 + o(x).$$

Ça, c'est fait : allons donc à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\frac{1+2x+2x^2}{1+2x+3x^2} &= \frac{1+2x+2x^2{}^{-1}}{1+2x+3x^2} = \frac{1+2x+2x^2}{1-(2x+3x^2)+4x^2+o(x^2)} \\
&= \frac{1+2x+2x^2}{1-2x+x^2+o(x^2)} 1+\underbrace{(2-2)}_{0}x+\underbrace{(2-4+1)}_{-1}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

Et finalement :

$$\left(\frac{1+2x+2x^2}{1+2x+3x^2}\right)^{1/4} - 1 = \left(1-x^2+o(x^2)\right)^{1/4} - 1 \sim -\frac{x^2}{4}\cdot$$

4. On cherche un développement asymptotique de la forme $\varphi(x) = ax+b+\dfrac{c}{x}+o(1/x)$; on va donc développer chaque terme du produit deux termes au delà de l'équivalent. Déjà :

$$\frac{\sqrt{1+2x^2}}{x} = \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),$$

et par ailleurs :

$$\ln(\sinh x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{2}(1-\mathrm{e}^x)\right) = x-\ln 2+o\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(1-\frac{\ln 2}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),$$

donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{4x^2}+\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)x\left(1-\frac{\ln 2}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x\sqrt{2}\left(1-\frac{\ln 2}{x}+\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= x\sqrt{2}-\sqrt{2}\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{4x}+\left(\frac{1}{x}\right),
\end{aligned}$$

donc le graphe Γ de φ possède pour asymptote la droite Δ d'équation $y = x\sqrt{2}-\sqrt{2}\ln 2$. Et puisque $\varphi(x)-\left(x\sqrt{2}-\sqrt{2}\ln 2\right) \sim \dfrac{\sqrt{2}}{4x}$, Γ est situé dessus Δ au voisinage de $+\infty$.

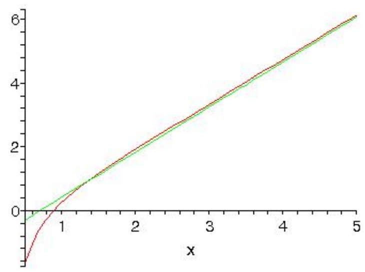

FIG. 3 – Le graphe de φ passe bien dessus son asymptote

3 Deux courbes paramétrées

1. M_t est défini pour $t \neq -1$. Comme suggéré dans l'énoncé, on s'intéresse à $M_{1/t}$: pour $t \neq 0$, on a $x(1/t) = y(t)$ et $y(1/t) = x(t)$, de sorte que $M_{1/t}$ est l'image de $M_{1/t}$ par la réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$.

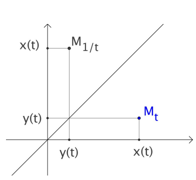

FIG. 4 – Une réduction du domaine d'étude

L'étude de l'arc sur $D =]-1, 1]$ nous permettra par symétrie d'obtenir les portions $]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$. Sur le domaine réduit, l'étude de x et de y est aisée : ces fonctions sont dérivables, de dérivées respectives :

$$x'(t) = \frac{1 + t^3 - t(3t^2)}{(1+t^3)^2} = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2},$$

et

$$y'(t) = \frac{2t(1+t^3) - t^2(3t^2)}{(1+t^3)^2} = \frac{t(2-t^3))}{(1+t^3)^2}.$$

Sur D, $-1 < t^3 \leq 1$, donc $2 - t^3 \geq 1$, donc le signe de $y'(t)$ est celui de t. Par contre, le signe de $x'(t)$ est celui de $1 - 2t^3$, qui change en $t_0 = \frac{1}{2^{1/3}}\cdot$

t	-1		0		t_0		1
$x'(t)$			$+$		0	$-$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$x(t_0)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$
$y'(t)$		$-$	0		$+$		

Il reste à comprendre le comportement au voisinage de -1. Pour cela, on note d'abord : $\frac{y(-1+u)}{x(-1+u)} = -1 + u \underset{u \to 0}{\longrightarrow} -1$, donc on s'intéresse à :

$$y(-1+u) + x(-1+u) = \frac{(-1+u) + (-1+u)^2}{1 + (-1+u)^3} \sim \frac{-u}{3u} = -\frac{1}{3},$$

donc notre courbe paramétrée Γ possède pour asymptote la droite Δ d'équation $y = -x - \frac{1}{3}\cdot$ Les stakanovistes pourront étudier la position relative (ils seront payés !) en établissant :

$$y(-1+u) + x(-1+u) = -\frac{1}{3} + \frac{u^2}{9} + o(u^2),$$

de sorte que Γ est dessus Δ

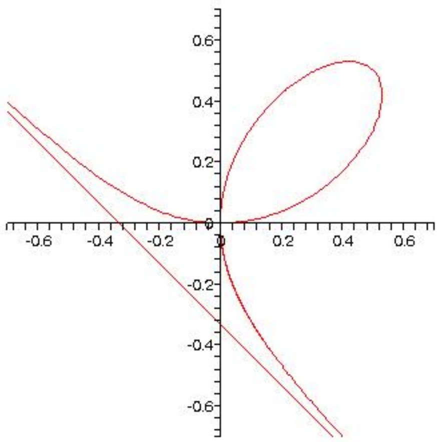

FIG. 5 – Le folium de Descartes (pchhhhh...)

2. La parité de ρ et sa 2π-périodicité permettent de réduire le domaine d'étude à $[0, \pi]$.

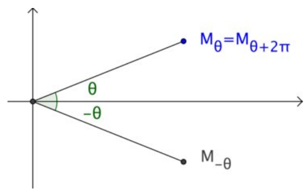

FIG. 6 – Réduction classique du domaine

Un petit travail de réécriture :

$$\rho(\theta) = \cos\theta - 2\cos^2\theta + 1 = \psi(\cos\theta),$$

avec $\psi : x \mapsto -2x^2 + x + 1$. Les racines de ψ ne sont pas trop compliquées à calculer, et nous fournissent la factorisation $\psi(x) = -2(x-1)(x+1/2)$, et ainsi :

$$\rho(\theta) = -2\left(\cos\theta - 1\right)\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right).$$

À partir de là, le signe de ρ n'est pas trop compliqué à étudier :

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\cos\theta - 1$	0		$-$		
$\cos\theta + \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$\rho(\theta)$	0	$+$	0	$-$	-2

On en sait assez pour passer au tracé :

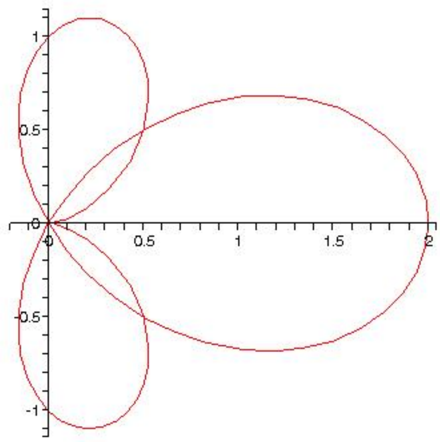

FIG. 7 – Encore une courbe classique en taupe

4 Une relation de récurrence d'ordre un

La fonction $f : x \mapsto x + \sin x + \dfrac{1}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, donc f est croissante[1] sur $\mathbb{R}$. Quant au signe de $f(x) - x$, c'est celui de $\sin x + \dfrac{1}{2}\cdot$ Il est nul lorsque $x = -\dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ et lorsque $x = -\dfrac{5\pi}{6}$ $[2\pi]$, et le signe entre ces réels est donné par les variations de la fonction sinus. Il est temps de représenter le graphe de f ainsi que les premières valeurs de u_n :

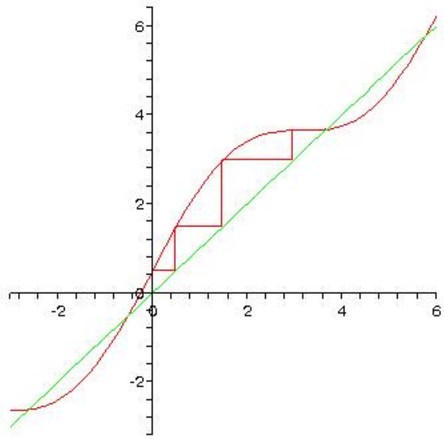

Fig. 8 – L'escalier classique

Toute l'action semble se passer dans l'intervalle $I = \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right]$. Cet intervalle est stable par f. En effet, si $x \in I$, alors $-\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{7\pi}{6}$, et la croissance de f donne alors :

$$-\frac{\pi}{6} = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6},$$

et on a bien $f(x) \in I$.

On établit alors par récurrence (immédiate, mais bon, une dernière fois, je vais la réécrire[2]) que tous les u_n appartiennent à I :

- On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in I$ ».
- $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée par hypothèse.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors $u_n \in I$, et puisque I est stable par f, on en déduit $f(u_n) \in I$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in I$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.
- Le principe de récurrence nous permet de conclure : $\mathcal{P}(n)$ est bien vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 *Trouver les différences avec la rédaction proposée dans le corrigé du DM 7.*

Ainsi, tous les u_n appartiennent à I, intervalle sur lequel on a $f(x) - x = \sin x + \dfrac{1}{2} \geq 0$, donc $f(u_n) \geq u_n$, de sorte que la suite u est croissante et majorée par $\dfrac{7\pi}{6}$, donc converge. Notons l sa limite.

Sortons les arguments usuels (CTRL C-CTRL V...) *Par continuité de f en l, on a $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(l)$. (u_{n+1}) étant extraite de (u_n), on a $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$. Mais $u_{n+1} = f(u_n)$, donc par unicité de la limite : $l = f(l)$.*

[1] Et ceux qui auront annoncé (inutilement) que f est strictement croissante - ce qui est vrai - ne doivent s'attendre à aucune indulgence de ma part : il devront l'avoir justifié soigneusement.

[2] faire un copier/coller, plutôt : c'est toujours la même chose !

Bien entendu, il existe beaucoup de réels vérifiant cette relation. Mais comment allons nous faire pour localiser la suite ? Essayons de faire **comme toujours** : l'inégalité $u_0 \leq u_n \leq \frac{7\pi}{6}$ (celle de gauche est une conséquence de la croissance de u) passée à la limite fournit : $0 = u_0 \leq l \leq \frac{7\pi}{6}\cdot$ Ainsi, $l \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right]$ et vérifie $f(l) = l$: la seule solution est $l = \frac{7\pi}{6}$, et ainsi :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7\pi}{6}\cdot$$

Notons enfin que f est « assez plate » vers l. Plus précisément :

$$f'(l) = \cos\frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} \simeq 0,13$$

de sorte que dans la « construction de l'escalier », les u_n se précipitent assez rapidement vers la limite. C'est vérifié expérimentalement (on gagne environ une décimale à chaque itération). Pour le prouver formellement, c'est un peu délicat (mais que faisable bientôt), mais on arrive effectivement à prouver qu'on a une vitesse de convergence « de l'ordre de $f'(l)^n$ », ce qui est bien le résultat mesuré expérimentalement.

5 Trois attaques pour une même somme

1. Ça sent les suites adjacentes, non ? Déjà très clairement, $T_n - S_n = \frac{1}{4n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$; ensuite, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{2(n+1)+2n+1-2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$$

donc S est croissante, et enfin

$$T_{n+1} - T_n = S_{n+1} - S_n + \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4n} = \frac{2n+n(2n+1)-(2n+1)(n+1)}{4n(2n+1)(n+1)} = \frac{-1}{4n(2n+1)(n+1)},$$

donc T est décroissante. On peut donc dégainer cet inepte théorème des suites adjacentes pour affirmer que S et T sont convergentes (vers la même limite, mais on s'en fiche).

2. Un petit dessin, peut-être ? On commence par fixer $n \geq 1$ puis $k \in [\![1, n]\!]$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(n+k)$.

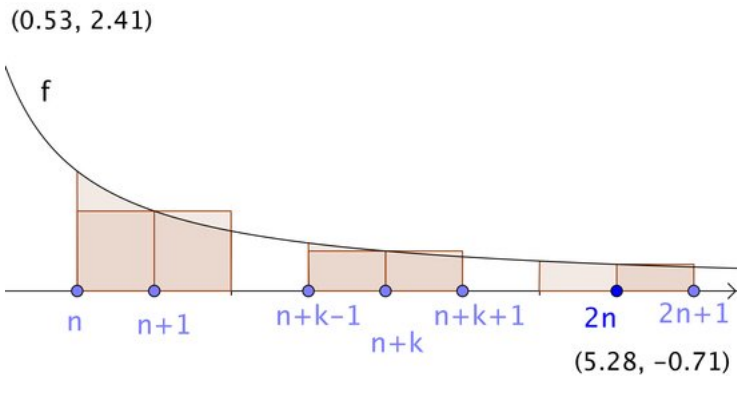

Fig. 9 – Comparaison somme/intégrale

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $I = [n+k-1, n+k]$, donc $f(t) \geq f(n+k)$ pour tout $t \in I$, donc en intégrant cette inégalité, on obtient $\int_{n+k-1}^{n+k} f \geq f(n+k)$. Le même travail sur

$[n+k, n+k+1]$ fournit $\displaystyle\int_{n+k}^{n+k+1} f \leq f(n+k)$, et ainsi :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \int_{n+k}^{n+k+1} f \leq f(n+k) \leq \int_{n+k-1}^{n+k} f.$$

En sommant ces inégalités pour k variant de 1 à n, on obtient :

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} \leq S_n \leq \int_{n}^{2n} \frac{dt}{t},$$

soit encore :

$$\ln \frac{2n+1}{n+1} \leq S_n \leq \ln 2. \qquad (I)$$

Il reste à voir que $\ln \dfrac{2n+1}{n+1} = \ln \dfrac{2n+2-1}{n+1} = \ln \left(2 - \dfrac{1}{n+1}\right)$, donc les membres extérieurs de (I) tendent l'un et l'autre vers $\ln 2$ quand n tend vers $+\infty$, et on peut ainsi gendarmiser.

3. On utilise maintenant la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}\cdot$

   (a) Si on ne nous a pas menti dans les toutes petites classe, l'aire du rectangle représenté vaut $\dfrac{1}{n} g\left(\dfrac{k}{n}\right)$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{n} \dfrac{1}{1+\dfrac{k}{n}}$ soit encore, mais mais mais... $\dfrac{1}{n+k}$ bien sûr !

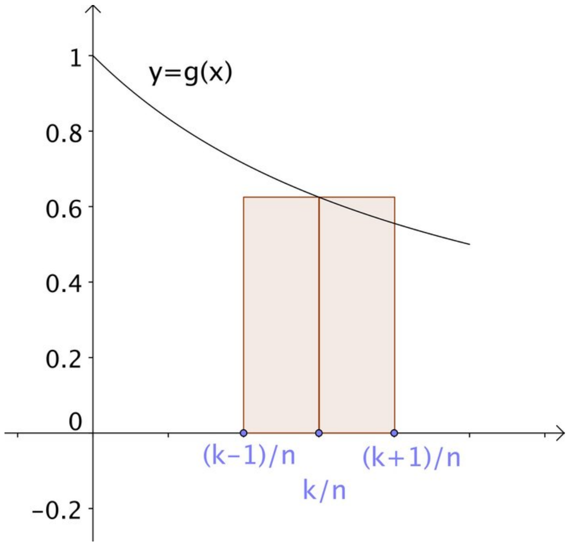

FIG. 10 – Un dernier dessin

   (b) On travaille comme plus haut pour obtenir :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} g \leq \frac{1}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g,$$

   soit après les dernières sommations :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} \frac{dt}{1+t} \leq S_n \leq \int_{0}^{1} \frac{dt}{1+t}.$$

   Il reste à noter que le majorant dans l'encadrement précédent vaut 1, et le minorant vaut $\ln \dfrac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2$, et les gendarmes passent à l'action.