843 - le 28 Novembre 2009 **DS 4 - 4 heures**

Calculatrices interdites.
Le symbole $\Longrightarrow$ est formellement proscrit.
Le symbole $\Longleftrightarrow$ ne sera utilisé qu'avec le plus grand soin, et avec parcimonie.

1 Du cours

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x \geq 0$ et $x^2 - y^2 = 1$. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = \operatorname{ch} t$ et $y = \operatorname{sh} t$.
   Les propriétés des fonctions ch *et* sh *sont supposées connues, donc n'auront pas à être établies, mais on représentera (sans justification) le graphe de ces deux applications sur $\mathbb{R}$.*
2. On considère une hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé. Montrer que la distance c entre le centre de symétrie de $\mathcal{H}$ et les foyers vérifie : $c^2 = a^2 + b^2$.
   Cette question, à défaut d'être difficile, demande tout de même un certain temps, et sera payée en conséquence. On pourra au choix refaire le changement de repère effectué dans la mise en équation des coniques, ou bien travailler en polaire. Dans les deux cas, il s'agit d'exprimer a, b et c... en fonction du reste ! On fera impérativement un brouillon.
3. Rappeler la définition d'une fonction injective, et celle d'une fonction surjective. Donner quatre fonctions : une qui est injective et surjective, une qui est injective et non-surjective, etc... On pourra montrer des patatoïdes, ou bien expliciter une fonction en précisant les ensembles de départ et d'arrivée.

2 Trois courbes paramétrées

1. On s'intéresse à la courbe Γ_1 de paramétrisation : $\begin{cases} x(t) &= (1+\cos^2 t)\sin t \\ y(t) &= (\cos t)\sin^2 t \end{cases}$
   (a) Réduire le domaine d'étude puis étudier x et y sur le domaine réduit.
   (b) Montrer que lorsque $\overrightarrow{V_t} \neq \overrightarrow{0}$, l'angle entre l'axe (Ox) et $\overrightarrow{V_t}$ vaut t modulo π. En déduire la nature des points stationnaires (faire des dessins...).
   (c) Représenter Γ_1.
2. On s'intéresse à la courbe Γ_2 d'équation polaire $\rho(\theta) = \ln \theta$.
   (a) Faire une première esquisse de Γ_2, en montrant différents scénarios possibles.
   (b) Étudier une éventuelle (...) asymptote.
   (c) Étudier les points d'inflexions : on pourra admettre l'unicité d'un point d'annulation d'une certaine fonction... en ayant préalablement prouvé son existence !
   (d) Représenter Γ_2.

3. Étudier et représenter l'arc Γ_3 de paramétrisation polaire $\rho(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta\cos(2\theta)}\cdot$
   On commencera par déterminer calmement l'ensemble de définition de ρ. On signalera la présence d'éventuels points d'inflexion supposés (sans prouver quoi que ce soit).

3 Une propriété essentielle des hyperboles

Soient $\mathcal{H}$ une hyperbole de sommets A et A', M un point de $\mathcal{H}$ distinct des sommets, et (T) la tangente à $\mathcal{H}$ en M. On suppose que (T) intersecte les tangentes à $\mathcal{H}$ en A et A' respectivement en les points P et P'.

1. Montrer que les deux foyers de $\mathcal{H}$ sont sur le cercle de diamètre $[P, P']$.
2. Réciproquement, soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par les deux foyers de $\mathcal{H}$. Existe-t-il un point M de $\mathcal{H}$ distinct des sommets tel que la construction précédente produise deux points P et P' tels que $[PP']$ soit un diamètre de $\mathcal{C}$?

4 Une « série alternée »

On note, pour $n \geq 1$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot$ L'objectif de cet exercice est de prouver la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$, puis de calculer la valeur de la limite en s'aidant de v_n.

1. On note ici, pour $n \geq 1$: $\alpha_n = u_{2n}$ et $\beta_n = u_{2n+1}$.
   (a) Montrer que $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante, $(\beta_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, et $\alpha_n \leq \beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et $(\beta_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes, et que leur limites sont égales.
   (c) Montrer enfin que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.
2. (a) Exprimer u_6 à l'aide de v_6 et v_3 (inutile de calculer les valeurs en jeu). Faire de même pour u_{2n} à l'aide de v_{2n} et v_n.
   (b) À l'aide d'une comparaison somme/intégrale, établir : $v_n \sim \ln n$.
   (c) Montrer que $v_{2n} - v_n$ possède une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
   (d) En déduire la valeur de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.