1 Du cours

1. No comment.
2. L'équation en jeu est équivalente à $z^3 = 8\mathrm{e}^{-i\pi/2}$, c'est-à-dire $z^3 = (2\mathrm{e}^{-i\pi/6})^3$ ou encore $\left(\dfrac{z}{2\mathrm{e}^{-i\pi/6}}\right)^3 = 1$, c'est-à-dire $\dfrac{z}{2\mathrm{e}^{-i\pi/6}} \in \{1, j, j^2\}$, et on en déduit l'ensemble de solutions :
$$\mathcal{S} = \{2\mathrm{e}^{-i\pi/6}, 2\mathrm{e}^{i\pi/2}, 2\mathrm{e}^{7i\pi/6} = 2\mathrm{e}^{-5i\pi/6}\} = \{\sqrt{3} - i, 2i, -\sqrt{3} - i\}$$

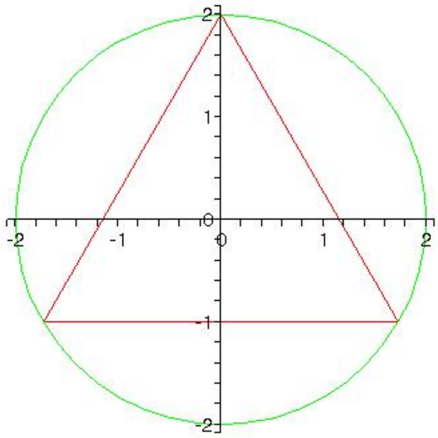

FIG. 1 – Les trois solutions forment un triangle équilatéral...

3. No comment.

2 Une équation banale

1. L'application cotan est définie sur $E = \mathbb{R} \setminus \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$, et clairement π-périodique.

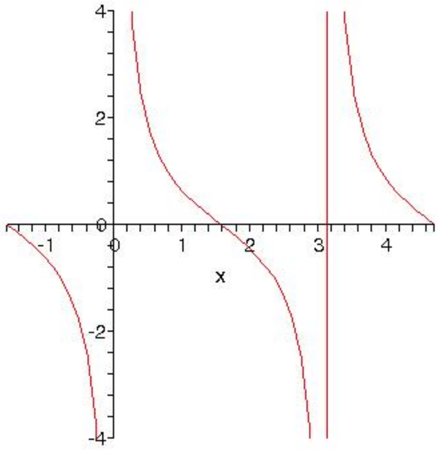

FIG. 2 – Le graphe de cotan sur $[-\pi/2, 3\pi/2]$

Sur E, elle est dérivable, de dérivée $\text{cotan}' = \dfrac{-\sin^2 - \cos^2}{\sin^2} = -\dfrac{1}{\cos^2}$, donc est strictement décroissante sur CHAQUE intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$ (mais pas leur réunion...). Les limites en 0^+ et π^- étant évidentes, le graphe de cotan sur $]0, \pi[$ s'en déduit.

2. Déjà, si $z^2 = 1$, alors z n'est pas solution de (E). On pourra donc joyeusement diviser par $(z^2-1)^{2p}$. Notre équation est alors équivalente à $\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)^{2p} = 1$, ce qui revient à l'existence de $k \in [\![0, 2p-1]\!]$ tel que $\dfrac{z^2+1}{z^2-1} = \mathrm{e}^{ik\pi/p}$.

   Fixons un tel k. $\dfrac{z^2+1}{z^2-1} = \mathrm{e}^{ik\pi/p}$ est équivalente à : $z^2(1 - \mathrm{e}^{ik\pi/p}) = -\mathrm{e}^{ik\pi/p} - 1$. Si $\mathrm{e}^{ik\pi/p} = 1$, c'est-à-dire $k = 0$ (cercle trigo...), alors cette équation $(0 = -2)$ n'a pas de solution. Pour les autres k, cela revient à
   $$z^2 = \frac{\mathrm{e}^{ik\pi/p}+1}{\mathrm{e}^{ik\pi/p}-1} = \cdots = -i \,\text{cotan}\, \frac{k\pi}{2p}\cdot \qquad (E_k)$$
   Lorsque $p \in [\![1, p-1]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2p} \in]0, \pi/2[$, donc a une cotangente strictement positive, donc (E_k) est équivalente à $z = \pm \mathrm{e}^{-i\pi/4}\sqrt{\text{cotan}\,\dfrac{k\pi}{2p}}$. Pour $k = p$, on obtient $z^2 = 0$, c'est-à-dire $z = 0$. Enfin, pour $k > p$, $\dfrac{k\pi}{2p} \in]\pi/2, \pi[$, donc a une cotangente strictement négative, donc (E_k) est équivalente à $z = \pm \mathrm{e}^{i\pi/4}\sqrt{-\,\text{cotan}\,\dfrac{k\pi}{2p}}$.

3. Il y a l'origine, et $p-1$ points placés sur chaque « semi-bissectrice » des axes...

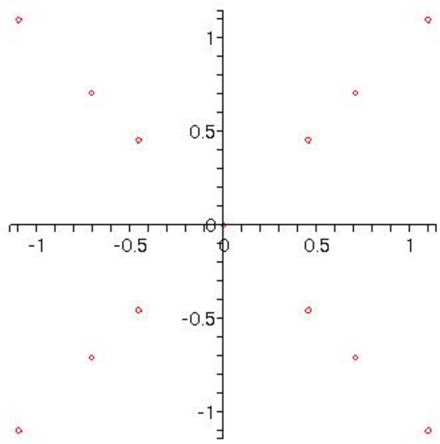

FIG. 3 – Les treize solutions, lorsque $n = 4$

4. La stricte monotonie de la fonction cotan sur $]0, \pi[$ nous assure que les $4p-4$ racines non nulles sont distinctes, ce qui fait un total de $4p-3$ solutions. Maintenant, on avait une éqation polynomiale de degré $4p-2$ (ben oui : les termes en z^{4p} disparaissent). Comme 0 est « racine double » (on peut mettre en facteur z^2 dans l'équation, puisque les termes constants disparaissent), on a le bon compte !

3 Des complexes et de la géométrie

1. Le cas de base correspond à $a = 1$, $b = j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et $c = \mathrm{e}^{-2i\pi/3} = \overline{j} = j^2$. On a alors $(a+b+c)^2 = (1+j+j^2)^2 = 0$, et $1 + j^2 + (j^2)^2 = 1 + j^2 + j^4 = 1 + j^2 + j = 0$, donc (R) est bien vérifiée.

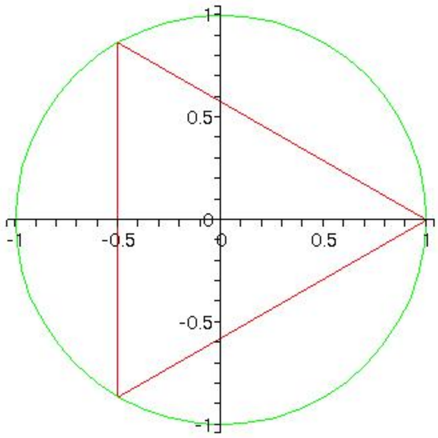

FIG. 4 – Un triangle équilatéral bien original

2. (a) G est l'isobarycentre, donc $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$.
   (b) On a $a+b+c = 3g + a' + b' + c'$, mais par ailleurs, $3g = a+b+c$, donc $a' + b' + c' = 0$.
   (c) $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont trois vecteurs de même norme formant entre eux des angles de $\pm\frac{2\pi}{3}\cdot$ Leurs affixes sont a', b' et c', donc $b' = ja'$ et $c' = j^2a'$ (vu l'orientation de (ABC) supposée dans l'énoncé). On a maintenant $(a+b+c)^2 = (3g)^2 = 9g^2$, alors que :

   $$a^2+b^2+c^2 = (g+a')^2+(g+ja')^2+(g+j^2a')^2 = 3g^2+2ga'(1+j+j^2)+a'^2(1+j^2+j^4) = 3j^2,$$

   et c'est gagné.
3. (a) D'une part, $a^2+b^2+c^2 = 3g^2+2g(a'+b'+c')+(a'^2+b'^2+c'^2) = 3g^2+(a'^2+b'^2+c'^2)$ et d'autre part, $(a+b+c)^2 = (3g)^2 = 9g^2$, donc (R) impose : $a'^2+b'^2+c'^2 = 0$. Maintenant, si on développe $(a'+b'+c')^2$, on trouve d'une part $0^2 = 0$, et d'autre part $a'^2+b'^2+c'^2+2(a'b'+a'c'+b'c')$, donc $a'b'+a'c'+b'c' = 0$.
   (b) On a :

   $$(z-a')(z-b')(z-c') = z^3 - (a'+b'+c')z^2 + (a'b'+a'c'+b'c')z - a'b'c' = z^3 - K,$$

   donc a', b', et c' sont les trois solutions de l'équation $Z^3 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, et ainsi :

   $$\{a', b', c'\} = \{\sqrt[3]{\rho_0}e^{i\theta_0/3}, j\sqrt[3]{\rho_0}e^{i\theta_0/3}, j^2\sqrt[3]{\rho_0}e^{i\theta_0/3}\}$$

   (il s'agit de l'égalité de deux ensembles, qui ne préjuge pas des valeurs individuelles de a', b' et c').
   (c) On a ($b' = ja'$ et $c' = j^2a'$) ou ($b' = j^2a'$ et $c' = ja'$). Dans un cas comme dans l'autre, les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ sont de même norme, et font entre eux des angles de $\pm\frac{2\pi}{3}$, prouvant que (ABC) est un triangle équilatéral.

4 Deux courbes paramétrées

1. (a) Puisque $t = t+1-1$ (!), on a $f(t) = \ln(1+t)+1-\frac{1}{1+t}\cdot$ Mais si on connait bien l'application $u \mapsto \frac{1}{u}$, on en déduit immédiatement que f est strictement croissante sur son domaine de définition, en tant que différence d'une fonction strictement croissante et d'une autre strictement décroissante. Puisque $f(0) = 0$, on en déduit que f est strictement négative sur $]-1, 0[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

(b) x est définie et dérivable sur $]-1,+\infty$, et $x'(t)=f(t)$a été étudié plus haut. y est quant-à-elle définie et dérivable sur $]-2,+\infty[$, avec $y(t)=2x(t/2)$ (ouvrir les yeux !), donc il n'y a pas un gros travail à faire pour avoir les variations de y.

t	-1		0		$+\infty$
$x'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Au voisinage de -1^+, on aura une asymptote horozontale, d'équation $y=\ln 2$. En 0, il y a un point stationnaire qui est probablement un point de rebroussement, (vu les variations de x et y) et en $+\infty$, on peut avoir une branche parabolique hirizontale, verticale, une asymptote... ou encore autre chose (qui sait ? !).

(c) Au voisinage de -1, il n'y a rien à faire. Au voisinage de $+\infty$, on a $x(t)\sim t\ln t$ alors que $y(t)\sim t\ln(t/2)\sim t\ln t$ (le passage des équivalents au logarithme est licite lorsque les quantités tendent vers $+\infty$, mais c'est à la frontière extérieure du cours ; on peut donc le justifier (une seule fois !) en écrivant par exemple : $x(t)=t\ln\left(t(1+1/t)\right)=t\ln t+t\ln(1+1/t)...$)
Ainsi, $y(t)\sim x(t)$. On va donc chercher une éventuelle asymptote en étudiant la différence :

$$y(t)-x(t)=t\ln(t/2)+t\ln(1+2/t)-\left(t\ln t+t\ln(1+1/t)\right)=\cdots\sim -t\ln 2\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty.$$

Ainsi, on a une « direction asymptotique » sans avoir d'asymptote (et ce n'est pas très facile à représenter. On peut s'en faire une idée avec par exemple le graphe de $\alpha\mapsto\alpha-\sqrt{\alpha}$).
Au voisinage de 0, deux développements limités élémentaires fournissent :

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}+t^2\begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix}+t^3\begin{pmatrix}-1/2\\-1/8\end{pmatrix}+o(t^3).$$

Les entiers fondamentaux de la courbe qu voisinage du point M_0 sont alors 2 et 3, et on a comme prévu un point de rebroussement (de première espèce).

(d)

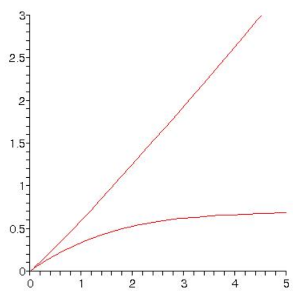

FIG. 5 – La riddoïde

2. (a) $x(t+2\pi)=x(t)+2\pi$ et $y(t+2\pi)=y(t)$. $M_{t+2\pi}$ est donc l'image de M_t par la translation de vecteur $\begin{pmatrix}2\pi\\0\end{pmatrix}$.

(b) $x(-t)=-x(t)$ et $y(-t)=y(t)$, donc M_{-t} est l'image de M_t par la réflexion par rapport à l'axe des y.

(c) Il suffit d'étudier x et y sur $[0, \pi]$, ce qui ne pose guère de problème vu les fonctions en jeu. Ensuite, une réflexion par rapport à l'axe des y et des translations successives nous donneront l'arc Γ.

Ainsi, $x'(t) = R(1 - \cos t)$ est strictement positive sur $]0, \pi[$ et s'annule en 0 et π, alors que $y'(t) = R \sin t$ a un signe plutôt bien connu sur $[0, \pi]$:

t	0		π
$x'(t)$	0	$+$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$R\pi$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$2R$
$y'(t)$	0	$+$	0

(d) Le vecteur vitesse est nul pour $t = 0$. L'accélération va donc fournir, si elle est non nulle, la demi-tangente à la courbe. On calcule donc $\overrightarrow{a} \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$. L'accélération est verticale. Les variations de x et y finissent le travail : on a un « point de rebroussement de première espèce ».

On pouvait aussi faire un DL de M_t au voisinage de 0.

(e)

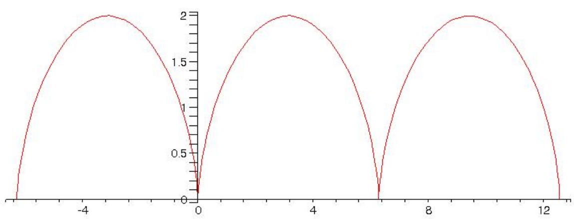

FIG. 6 – La cycloïde (avec $R = 1$ et $t \in [-2\pi, 4\pi]$)

Cette courbe correspond à la trajectoire d'un point fixe à la périphérie d'une roue qui tourne sans glisser sur le sol (typiquement : la valve d'une roue de vélo). Il est intéressant de noter que lorsque ce point est au contact du sol, sa vitesse matérielle est nulle.

5 Autour de l'astroïde

1. Les considérations standard de périodicité/parité ramènent l'étude de X et Y à $[0, \pi/2]$. On pourrait même se ramener à $[0, \pi/4]$, en notant que $M_{\pi/2-t}$ se déuit de M_t à l'aide de...

   Sur $[0, \pi/2]$ les fonction X et Y sont respectivement strictement décroissantes et strictement croissantes :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	0
$x(t)$	a	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	a
$y'(t)$	0	$+$	0

Pour la nature du point stationnaire M_0, on peut faire un DL, ou calculer l'accélération et utiliser la symétrie. Dans un cas comme dans l'autre, on obtient un point de rebroussement de première espèce. Vu les différentes symétries, $M_{\pi/2}$ est évidemment de même nature. On peut maintenant représenter l'astroïde :

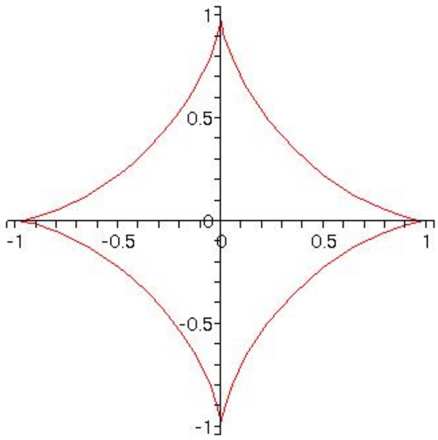

FIG. 7 – L'astroïde (avec $a = 1$)

2. Le vecteur vitesse fournit un candidat naturel comme vecteur directeur de la tangente. Pour avoir quelque chose de plus simple, on factorise la quantité non nulle $3a \cos t \sin t$, pour trouver : $\overrightarrow{T_t} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{T_t}$ est alors $\overrightarrow{N_t} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, et une équation de T_t est alors (la constante est comme d'habitude évaluée en M_t) :

$$x \sin t + y \cos t = K = a \cos^3 t \sin t + a \sin^3 t \cos t = a \sin t \cos t(\cos^2 t + \sin^2 t) = a \sin t \cos t.$$

3. On a $A_t(x_A, 0)$, avec $x_a \sin t = a \sin t \cos t$, donc $(\sin t \neq 0)$: $x_A = a \cos t$. De même, $y_B = a \sin t$. On a alors :
$$A_t B_t^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2,$$
et $A_t B_t$ est bien constante.
Si on place une échelle contre un mur et qu'on la fait glisser jusqu'à la position horizontale, on obtient une famille de droites (segments...) qui « enveloppe » une courbe : c'est l'astroïde.

4. (a) On a d'une part $x_H(t) \sin t + y_H(t) \cos t = a \cos t \sin t$ (appartenance de H_t à T_t), et d'autre part $\overrightarrow{OH_t}.\overrightarrow{T_t} = 0$, qui se traduit $-x_H(t) \cos t + y_H(t) \sin t = 0$. De ces deux équations, on déduit sans problème par combinaisons linéaires (il n'est pas utile de *résoudre* un système, ici ; pourquoi ?) :
$$\begin{cases} x_H(t) = a \cos t \sin^2 t \\ y_H(t) = a \sin t \cos^2 t \end{cases}$$

   (b) On a :
$$\overrightarrow{V_t} = \begin{pmatrix} -\sin t(1 - 3\cos^2 t) \\ \cos t(1 - 3\sin^2 t) \end{pmatrix}$$

   Il semble alors raisonnable de faire intervenir t_1 (resp.) l'unique réel entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus (resp. cosinus) vaut $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot$ Puisque $\sin t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$, on a par croissance du sinus sur $[0, \pi/2]$: $t_1 < \frac{\pi}{4}$; et de même : $t_2 > \frac{\pi}{4}\cdot$ La connaissance des fonctions sinus et cosinus nous donne alors le signe de $x'_H(t)$ et $y'_H(t)$ sur $]0, \pi/2[$:

t	0		t_1		t_2		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$			$+$		0	$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	$x(t_1)$	$\nearrow$	$x(t_2)$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$y(t_1)$	$\searrow$	$y(t_2)$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0		$-$		

Lorsque t tend vers 0, $x_H(t)$ et $y_H(t)$ tendent vers 0, mais avec $\dfrac{y_H(t)}{x_H(t)} = \operatorname{cotan} t \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc la courbe présente une « demi-asymptangente » (...) verticale ! Même chose au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$. *Notons que si on avait prolongé la courbe à* $[0, \pi/2]$, *il n'y aurait plus eu de problème puisque* H_0 *n'est pas stationnaire.* Il reste à représenter le lieu décrit par H_t :

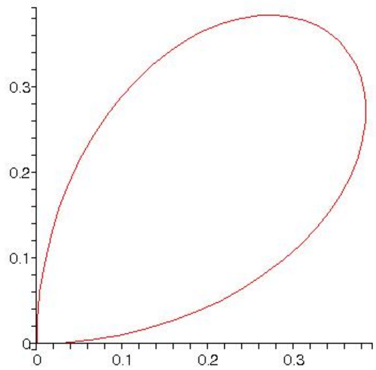

FIG. 8 – Les H_t, pour $t \in]0, \pi/2[$

(attention au sens de parcours...) Et pour le même prix :

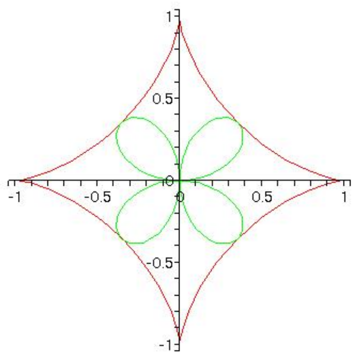

FIG. 9 – Les M_t et H_t, pour $t \in [0, 2\pi]$

On pourra commenter la présence de points de contact entre les deux courbes...