843 - le 7 Novembre 2009 **DS 3 - 4 heures**

Calculatrices interdites

1 Du cours

1. Donner l'ensemble des solutions complexes de l'équation $z^n = 1$ (n est un entier strictement positif fixé). Prouver *ensuite* le résultat énoncé.
2. Donner les solutions de $z^3 = -8i$. On les écrira d'une part sous la forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$, et d'autre part sous la forme algébrique $a + bi$. Enfin, on les représentera dans le plan complexe.
3. Donner avec une preuve la formule donnant la distance d'un point à un plan de l'espace. Même chose pour la distance d'un point à une droite de l'espace.

2 Une équation banale

1. Étudier rapidement l'application $t \mapsto \dfrac{\cos t}{\sin t}$: domaine de définition, variations, graphe sur un intervalle pertinent.
2. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+1)^{2p} - (z^2-1)^{2p} = 0$.
3. Représenter dans le plan les solutions trouvées.
4. Commenter le nombre de solutions.

3 Des complexes et de la géométrie

Soient A, B et C trois points distincts d'affixes respectifs a, b et c. On se propose de montrer que A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si

$$(a+b+c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2) \qquad (R)$$

1. Donner un exemple de telle configuration, et vérifier (R) dans ce cas.
2. On suppose ici que A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral (avec par exemple (ABC) le sens de parcours trigonométrique). On note G l'isobarycentre de ces points, et g son affixe.
   (a) Que vaut g ? On note maintenant $a = g + a'$, $b = g + b'$ et $c = g + c'$.
   (b) Que dire de $a' + b' + c'$?
   (c) Géométriquement, que dire de $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$? en déduire les valeurs de b' et c' en fonction de g et a', et conclure.
3. On suppose ici (R) vérifiée, on note G l'isobarycentre des trois points, g son affixe, et (a', b', c') les complexes tels que $a = g + a'$, $b = g + b'$ et $c = g + c'$.
   (a) Montrer : $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 0$, puis : $a'b' + a'c' + b'c' = 0$.
   (b) On note $K = a'b'c' = \rho_0 e^{i\theta_0}$. Développer $(z-a')(z-b')(z-c')$, et en déduire les valeurs de a', b' et c' (dans le désordre !).
   (c) Conclure.

4 Deux courbes paramétrées

1. On s'intéresse ici à l'arc paramétré : $M_t \begin{cases} x(t) = t\ln(1+t) \\ y(t) = t\ln(1+t/2) \end{cases}$
   (a) Étudier $f : t \mapsto \ln(1+t) + \dfrac{t}{1+t}$ (variations et signe).
   (b) Établir les variations de x et y ; faire une première esquisse de l'arc avec différents scénarii
   (c) Étudier les branches infinies, puis l'aspect de la courbe au voisinage du point auquel on pense.
   (d) Représenter l'arc paramétré.
2. On fixe $R > 0$, et on définit $x(t) = Rt - R\sin t$ et $y(t) = R - R\cos t$. Le but de l'exercice est de représenter la courbe paramétrée $\Gamma = \{M_t \,|\, t \in \mathbb{R}\}$, avec M_t le point de coordonnées $\big(x(t), y(t)\big)$ dans un repère orthonormé fixé. On fera beaucoup de petits croquis.
   (a) Comment construire $M_{t+2\pi}$ à l'aide de M_t ?
   (b) Comment construire M_{-t} à l'aide de M_t ?
   (c) Etudier les variations de x et y sur un intervalle que vous jugerez pertinent.
   (d) Donner (en justifiant) l'allure de la courbe au voisinage de M_0.
   (e) Représenter Γ (ou au moins une partie !).

5 Autour de l'astroïde

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On fixe ici a un réel strictement positif, et $\mathcal{A}$ désigne la courbe d'équation :

$$M_t \begin{cases} X(t) = a\cos^3 t \\ Y(t) = a\sin^3 t \end{cases}$$

1. Étudier et représenter $\mathcal{A}$.
2. On suppose ici : $t \in]0, \pi/2[$. Donner un vecteur tangent à $\mathcal{A}$ en M_t. Donner ensuite un vecteur normal au vecteur précédent, puis une équation de la tangente T_t à $\mathcal{A}$ en M_t.
3. Pour $t \in]0, \pi/2[$, on note A_t et B_t les intersections respectives de T_t avec l'axe des x et celui des y. Montrer que la distance A_tB_t est constante.
4. Pour $t \in]0, \pi/2[$, on note H_t le projeté orthogonal de O sur T_t.
   (a) Calculer les coordonnées $X_H(t)$ et $Y_H(t)$ de H_t dans $\mathcal{R}$.
   (b) Réprésenter la courbe décrite par H_t lorsque t décrit $]0, \pi/2[$.