843 - le 3 Octobre 2009 **DS 2 - 4 heures**

Calculatrices interdites. Merci d'encadrer vos résultats, et de me laisser une zone d'expression libre en haut de la première copie. Les copies qui ne sont pas correctement numérotées agaceront le correcteur, ce qui n'est jamais une bonne idée, obviously.

À titre exceptionnel, on donne une indication sur ce que pourrait être le barème (sujet à modification), ainsi que le temps que l'on peut consacrer à chaque partie, dans l'optique de tout traiter (!) :

1. partie 1 : 4 points en 40 minutes ;
2. partie 2 : 2 points en 15 minutes ;
3. parties 3, 4 et 5 : 6 points en une heure chacune.

1 Du cours

1. Donner, avec une preuve succinte, les valeurs de $1 + 2 + \cdots + N$ et $1 + q + q^2 + \cdots + q^N$ lorsque $N \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{C}$.
2. Soit a une application continue sur un intervalle I. Énoncer *puis* prouver le théorème décrivant les solutions de l'équation $y'(t) + a(t)y(t) = 0$.
3. Énoncer *puis* prouver l'inégalité triangulaire. On précisera (avec une preuve) les cas d'égalité.

2 Surprise !

Avec Maple...

1. Comment calculer les sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} i^2$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n^2 - k)$?
2. Même chose avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} (i + k) \right)$?
3. Comment résoudre l'équation différentielle $ty''(t) + 3y(t) = t^2 + 5$?
4. Comment obtenir $f''(\pi/2)$, avec $f : x \mapsto x^{x^2 \sin x}$?

3 Quelques calculs

1. Déterminer les applications dérivables sur $]-1, +\infty[$, telles que $y(0) = 843$ et :
$$\forall t > -1, \qquad (t + 1)y'(t) + 2y(t) = t^2.$$
2. Résoudre l'équation différentielle
$$y''(t) + y'(t) - 20y(t) = \mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{t},$$
avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$.
3. Prouver que le graphe de l'application
$$x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x^6 + x^5 + x^4 + 1}}{\mathrm{e}^{1/x}\sqrt{x^2 + x + 1}}$$
possède une asymptote (au voisinage de $+\infty$), et préciser les positions relatives.
On commencera pas essuyer ses lunettes pour être certain de ne pas faire trois pages de calculs à partir d'une expression fausse. À bon entendeur...

4 Un développement asymptotique

On s'intéresse ici, pour $n \in \mathbb{N}^*$ supérieur ou égal à 2, à l'équation

$$x^2 \mathrm{e}^x = \frac{1}{n} \cdot \tag{E_n}$$

1. En étudiant $f : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x$ (qu'on représentera), montrer que pour $n \geq 2$, l'équation (E_n) possède exactement trois racines, dont exactement une strictement inférieure à -2. *On admettra : $e^2 < 8$. Dans la suite, on note x_n la solution inférieure à -2, et on va chercher un développement asymptotique de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.*
2. Montrer que pour n assez grand, on a $x_n > -\sqrt{n}$. En déduire : $x_n = o(n)$.
3. Prouver : $x_n \sim -\ln n$.
4. On note $x_n = (-\ln n)(1 + \alpha_n)$. Trouver un équivalent de α_n.
5. A-t-on $x_n - (-\ln n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$?
6. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n (en plus du « petit o » !)

5 Morphismes taupinaux

1. Déterminer et représenter l'ensemble des $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\mathrm{e}^{ab} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$$

2. Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b.$$

3. Déterminer et représenter l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b.$$

4. On s'intéresse à partir de maintenant aux réels vérifiant :

$$\mathrm{e}^{ab} = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b.$$

   Dans toute la suite on note, à a fixé, φ_a l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall b \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_a(b) = \mathrm{e}^{ab} - \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b.$$

   Il s'agit donc de déterminer, pour tout réel a, les $b \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi_a(b) = 0$. Chaque application φ_a étant clairement dérivable, on va étudier les variations de ces applications à l'aide de la dérivée.

   (a) Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{ab} = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$ lorsque $a = 0$ puis lorsque $a = 1$.

   (b) Calculer, pour $a, b \in \mathbb{R}$, la valeur de $\varphi'_a(b)$.

   (c) On suppose ici : $a < 0$. Étudier le signe de $\varphi'_a(b)$ *(et NON, il ne s'agit pas uniquement de résoudre $\varphi'_a(b) = 0$...)*. En déduire les variations de φ_a, puis montrer qu'il existe un unique $b \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{ab} = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$.

   (d) On suppose ici : $a > 1$. Étudier la fonction $\psi : b \mapsto a\mathrm{e}^{b(a-1)} - 1$. On prouvera en particulier que cette fonction s'annule en un unique point, et on déterminera le signe de ψ sur $\mathbb{R}$. En déduire les variations de φ_a, et prouver enfin qu'il existe un unique $b \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{ab} = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$.

   (e) On suppose enfin : $0 < a < 1$. Montrer que φ_a possède un maximum pris en un certain x_a. On note alors $g(a) = \varphi_a(x_a)$ et on admet que g est strictement décroissante sur $]0, 1[$. En déduire le signe de g, et conclure.