1 Du cours

1. Heu... $\dfrac{\alpha_n u_n}{\alpha_n v_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$!
2. Sous les hypothèses de l'énoncé : $\dfrac{\ln u_n}{\ln v_n} - 1 = \dfrac{\ln u_n - \ln v_n}{\ln v_n} = \dfrac{\ln \dfrac{u_n}{v_n}}{\ln v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{\ln u_n}{\ln v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\ln u_n \sim \ln v_n$.
3. Il suffit de prendre $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$: $f(x) \sim 1 \sim g(x)$ mais $\ln\left(f(x)\right) \sim \dfrac{1}{x}$ et $\ln\left(g(x)\right) \sim \dfrac{1}{x^2}$, donc $\ln\left(f(x)\right)$ et $\ln\left(g(x)\right)$ ne sont pas équivalents lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Supposons $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ et $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$. On a alors $f(x) = 2x + o(x)$ et $g(x) = 3x + o(x)$, donc $f(x) + g(x) = 5x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} 5x$, et hop !
5. Il suffit de prendre $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $v_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$, et $w_n = z_n = -1$...
6. Pour être divisible par 4 il est nécessaire d'être divisible par 2 (si $n = 4m$, alors $n = 2.2m$), mais ce n'est pas suffisant : 2 est divisible par 2 sans l'être par 4.
7. Pour être divisible par 6, il n'est pas nécessaire d'être divisible par 9 (contre-exemple : 6). Ce n'est pas non plus suffisant (contre-exemple : 9)

2 Quelques calculs standards

1. On écrit l'expression sous forme exponentielle : $\left(1 + \dfrac{2}{n\ln^2 n}\right)^{n\ln n} = \exp\left(n\ln n \ln\left(1 + \dfrac{2}{n\ln^2 n}\right)\right)$.
   On a $\ln\left(1 + \dfrac{2}{n\ln^2 n}\right) \sim \dfrac{2}{n\ln^2 n}$, donc $n\ln n \ln\left(1 + \dfrac{2}{n\ln^2 n}\right) \sim \dfrac{2}{\ln n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par continuité de l'exponentielle :
   $$\left(1 + \frac{2}{n\ln^2 n}\right)^{n\ln n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1.$$
2. Sans génie excessif, on commence par se ramener à des choses petites :
   $$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - \ln(1+x)}{\ln(1+x)\sin x}.$$
   Le dénominateur est équivalent à x^2. Pour le numérateur, un DL à l'ordre 1 ne suffit pas (les termes d'ordre 1 s'éliminent). À l'ordre 2, tout va bien :
   $$\sin x - \ln(1+x) = \left(x + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}.$$
   Ainsi $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{\sin x} \sim \dfrac{1}{2}$, puis :
   $$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
3. On passe à nouveau sous la forme exponentielle :
   $$\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{\ln(1+x)}{x^2}} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x^2}\ln\frac{\ln(1+x)}{x}\right),$$

avec ici
$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - x^2/2 + o(x^2)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$
donc $\ln \dfrac{\ln(1+x)}{x} \sim -\dfrac{x}{2}$, et $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2} \sim \dfrac{1}{x}$, de sorte que $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2} \ln \dfrac{\ln(1+x)}{x} \sim -\dfrac{1}{2}$, et on peut conclure en deux temps comme plus haut :
$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{\ln(1+x)}{x^2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1/2}.$$

4. On a manifestement $f(x) \sim x$. On va chercher a priori un développement asymptotique de la forme $f(x) = x + b + \dfrac{c}{x} + o(1/x)$; il faut donc aller deux termes plus loin que l'équivalent dans chaque terme du produit. D'une part, $\mathrm{e}^{-1/x} = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + o(1/x^2)$, et d'autre part :
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x + 1} &= x\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + o(1/x^2)\right)^{1/3} \\ &= x\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{9}\frac{4}{x^2} + o(1/x^2)\right) \\ &= x\left(1 + \frac{2}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o(1/x^2)\right) \end{aligned}$$
Multiplions les deux développements asymptotiques obtenus :
$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(1/x^2)\right)\left(1 + \frac{2}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o(1/x^2)\right) \\ &= x\left(1 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{9} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2} + o(1/x^2)\right) \\ &= x - \frac{1}{3} - \frac{5}{18}\frac{1}{x} + o(1/x). \end{aligned}$$
Déjà, $f(x) - \left(x - \dfrac{1}{3}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc le graphe de f possède pour asymptote la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{3}\cdot$ Ensuite, la différence $f(x) - \left(x - \dfrac{1}{3}\right)$ est équivalente à $-\dfrac{5}{18}\dfrac{1}{x}$, donc est négative au voisinage de $+\infty$, donc le graphe est situé sous l'asymptote.

5. Le terme dont on prend le logarithme est équivalent à e^x : on va factoriser cet équivalent, pour obtenir :
$$g(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x\left(1 + \frac{2x^4}{\mathrm{e}^x} + \frac{3}{\mathrm{e}^x}\right)\right) = x + \ln\left(1 + \frac{2x^4}{\mathrm{e}^x} + o\left(\frac{x^4}{\mathrm{e}^x}\right)\right) = x + \frac{2x^4}{\mathrm{e}^x} + o\left(\frac{x^4}{\mathrm{e}^x}\right)$$
donc $g(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, avec $g(x) - x \sim \dfrac{2x^4}{\mathrm{e}^x}$ qui est positif au voisinage de $+\infty$. Le graphe de g est donc situé (au voisinage de $+\infty$) au dessus de la droite d'équation $y = x$, qui constitue son asymptote.

3 Diverses choses

1. Et si on pivotait ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & - & 3t & = & 2\\ 2x & - & 8y & + & 2z & & & = & 1\\ 4x & - & 14y & + & 10z & - & 6t & = & 5\\ -x & + & 7y & + & 8z & - & 9t & = & 4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & - & 3t & = & 2\\ & - & 2y & - & 6z & + & 6t & = & -3\\ & - & 2y & + & 6z & + & 6t & = & -3\\ & - & 4y & + & 12z & - & 12t & = & 6\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 3y & + & 4z & - & 3t & = & 2\\ & - & 2y & - & 6z & + & 6t & = & -3\\ & & & & & & 0 & = & 0\\ & & & & & & 0 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcccl} x & = & 3y-4z+3t+2 & = & -13z+12t+\dfrac{13}{2}\\ y & = & -\dfrac{1}{2}(6z-6t-3) & = & -3z+3t+\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{S}=\left\{\left(-13\alpha+12\beta+\frac{13}{2},-3\alpha+3\beta+\frac{3}{2},\alpha,\beta\right)\ \middle|\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

2. Si on a bien compris l'arithmétique du collège (où il nous a été raconté à juste titre qu'il convenait de ne pas diviser par 0 :
   - Si $a\neq 0$, alors $az=b$ si et seulement si $z=\dfrac{b}{a}$;
   - si $a=0$ et $b=0$, alors $az=b$ pour tout complexe z ;
   - si $a=0$ et $b\neq 0$, alors $az=b$ pour aucun complexe z.
3. Déjà fait 1000 fois : la somme S a calculer est la partie réelle d'une somme faisant intervenir une suite géométrique de raison e^{ix}. Ainsi :
   - Si $e^{ix}=1$ (c'est-à-dire $x=0\ [2\pi]$), alors[1] $S=n+5$.
   - Sinon :

   $$S=\mathrm{Re}\left(e^{4ix}+\cdots+e^{(n+8)ix}\right)=\mathrm{Re}\left(e^{4ix}\left(1+e^{ix}+\cdots+\left(e^{ix}\right)^{n+4}\right)\right)=\mathrm{Re}\left(e^{4ix}\frac{e^{(n+5)ix}-1}{e^{ix}-1}\right)\cdot$$

   Avec le travail usuel de passage à l'angle moitié, on obtient :

   $$e^{4ix}\frac{e^{(n+5)ix}-1}{e^{ix}-1}=e^{4ix}\frac{2i\sin\frac{(n+5)x}{2}e^{(n+5)ix/2}}{2i\sin\frac{x}{2}e^{ix/2}}=e^{i\frac{(n+12)x}{2}}\frac{\sin\frac{(n+5)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

   Il reste à prendre la partie réelle, pour trouver :

   $$\sum_{k=4}^{n+8}\cos(kx)=\frac{\sin\frac{(n+5)x}{2}\cos\frac{(n+12)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

4.
   - On définit, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\leq\dfrac{4n+3}{6}\sqrt{n}$ »
   - La délicate preuve de $\mathcal{P}(0)$ est laissé au lecteur.
   - On suppose $\mathcal{P}(n)$ vérifié, avec n un entier fixé. On a alors

   $$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\leq\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}+\sqrt{n+1}.$$

   Il SUFFIT donc de montrer :

   $$\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\leq\frac{4(n+1)+3}{6}\sqrt{n+1}\qquad(I)$$

[1] aurez-vous bien compté ?

Mais (I) est équivalente (et c'est ici crucial d'avoir l'équivalence) à : $(4n+3)\sqrt{n} \leq (4n+1)\sqrt{n+1}$. Lorsque deux réels α et β sont positifs, il y a équivalence entre $\alpha \leq \beta$ et $\alpha^2 \leq \beta^2$ (pourquoi, au fait ?), de sorte que (I) est équivalente à : $(4n+3)^2 n \leq (4n+1)^2(n+1)$. En développant, on constate que cette dernière inégalité est vérifiée, ce qui prouve (I) grâce aux équivalences. Mais (I) était suffisante (et pas nécessaire) pour prouver $\mathcal{P}(n+1)$; c'est donc gagné.

- Le principe de récurrence nous assure que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 Equivalent de Stirling

4.1 Calcul et équivalent des intégrales de Wallis

1. De difficiles calculs permettent d'obtenir : $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
2. On écrit :
$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\sin^n t dt = I_n - \int_0^{\pi/2} \cos t(\cos t \sin^n t)dt,$$
que l'on peut intégrer par parties en POSANT $u(t) = \cos t$ (et on a alors $u'(t) = -\sin t$). Pour avoir $v'(t) = \cos t \sin^n t$, il SUFFIT de prendre $v(t) = \dfrac{\sin^{n+1} t}{n+1}\cdot$ On obtient alors (en faisant attention aux trois signes "$-$") : $I_{n+2} = I_n - \frac{n+1}{n+2} I_{n+2}$, et je vous laisse conclure.
(BIEN ENTENDU, tout le monde aura noté la façon de rédiger : POSER $v'(t) = ...$ n'a pas de sens : c'est comme POSER $x^2 = 3$ ou $\cos x = 1$. De même, pour avoir $v'(t) = \cos t \sin^n t$, il n'est certainement pas NECESSAIRE de prendre $v(t) = \dfrac{\sin^{n+1} t}{n+1}\cdot$ Au moment de faire le corrigé, je sais donc que je ne verrai sur AUCUNE copie :
$$v'(t) = \cos t \sin^n t \quad \Longrightarrow \quad v(t) = \frac{\sin^{n+1} t}{n+1}\cdot$$
Ne passez pas à la suite tant que vous n'avez pas compris ce qui précède...)
3. Pour justifier la formule « avec des petits points », on écrit : $I_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \dfrac{2k-1}{2k}.\dfrac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4}$, puis :
$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 3.1}{(2k)(2k-2)\cdots 4.2}\frac{\pi}{2}\cdot$$
En multipliant le numérateur et le dénominateur par $2k(2k-2)\dots 4.2$, qui au passage est égal à $2^k k!$, on obtient : $I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}\dfrac{\pi}{2}\cdot$
Pour une (passionante) preuve par récurrence, on commence par définir, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la proposition $P(k)$: « $I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ » :
   - $P(0)$ est clairement établie ($I_0 = \dfrac{\pi}{2}$).
   - Supposons $P(k)$ vérifiée pour un certain $k \in \mathbb{N}$: on a alors grâce à la relation établie plus haut :
$$I_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2}\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)(2k)!}{(2k+2)^2 4^k (k!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2k+2)!}{4^{k+1}(k+1)!^2}\frac{\pi}{2},$$
ce qui établit $P(k+1)$.
   - Le principe de récurrence permet de conclure.
4. Le même calcul « avec des petits points » permet d'obtenir
$$I_7 = \frac{6}{7} I_5 = \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3} I_1 = \frac{(6.4.2)^2}{7.6.5.4.3.2} = \frac{2.3.2.2.2.1}{7!} = \frac{2^3 3!}{7!}$$
et de la même façon : $I_{2k+1} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\cdot$

5. Si on note $u_n = (n+1)I_nI_{n+1}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+2}{n+1}\dfrac{I_{n+2}}{I_n} = 1$ d'après la question 2, donc u_n est indépendant de $n \in \mathbb{N}$, et vaut donc $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
   On écrit alors :
$$nI_nI_{n+1} = \frac{n}{n+1}u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$
   puisque u_n est constante et $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $t \in [0,\pi/2]$, on a $\leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t$ car $\sin t \leq 1$, inégalité qu'on multiplie par $\sin^n t$ qui est ≥ 0. Cette relation étant vraie **pour tout** $t \in [0,\pi/2]$, "on peut l'intégrer entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$" (cf DM), ce qui fournit exactement : $I_{n+1} \leq I_n$.
7. Notons déjà que les expressions de I_{2k} et I_{2k+1} assurent que les I_n sont non nuls.
   Ensuite, il suffit d'écrire : $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, puis : $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, puis de noter que le membre de gauche vaut $\dfrac{n+1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui permet d'appliquer le théorème des gendarmes.
8. On écrit :
$$nI_n^2 = nI_nI_{n+1}\frac{I_n}{I_{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$
   et on utilise la continuité de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ en $\dfrac{\pi}{2}$, ce qui donne $\sqrt{n}I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ puis $\sqrt{n}I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et enfin $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4.2 Equivalent de Stirling

1. On calcule d'abord calmement :
$$v_n = \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n}\right) = \ln\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1/2}.\mathrm{e}\right) = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$
   Si on se contente d'écrire $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^2} + o(1/n^2)$, on obtient :
$$v_n = 1 - n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2n}+o(1/n)\right) = 1 - \left(1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+o(1/n)\right) = o(1/n),$$
   et c'est insuffisant. Il faut donc courageusement pousser le DL de $\ln(1+1/n)$ un degré plus loin. $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + o(1/n^3)$, donc :
$$v_n = 1 - \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o(1/n^2)\right) = 1 - \left(1+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{n^2}+o(1/n^2)\right) = -\frac{1}{12n^2}+o(1/n^2),$$
   et on obtient l'équivalent souhaité.
2. Il suffit de noter que $12n^2v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$, donc pour n assez grand, $-2 \leq 12n^2v_n \leq 0$, et il reste à diviser par la quantité positive $12n^2$.
3. Le fait que $(u_n)_{n\geq n_0+1}$ soit décroissante est une trivalité ($u_{n+1} - u_n = v_n \leq 0$). La minoration se montre par une récurrence sans finesse (c'est clair pour $n = n_0$, et à chaque étape, u_n augmente de v_n et w_n augmente de $-\dfrac{1}{6n^2}$, etc...)
4. Il s'agit de majorer la somme $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{k^2}$.

Si $k>1$, on a $k^2>k(k-1)>0$, donc $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, donc en sommant, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{k^2} &\leq \left(\frac{1}{n_0-1}-\frac{1}{n_0}\right)+\left(\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_0+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-2}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)\\ &= -\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n_0-1}.\end{aligned}$$

La minoration de w_n s'en déduit.

Second point de vue (qui est bien plus général et ne dépend pas de l'astuce à deux balles $\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$) : pour $k-1\leq t\leq k$ on a $\frac{1}{k}\leq\frac{1}{t}$, donc en intégrant cette relation pour t variant de $k-1$ à k, on obtient $\frac{1}{k}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t}$ (un dessin est indispensable ici...), puis en sommant :

$$\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{1}{k^2}\leq\int_{n_0-1}^{n-1}\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n_0-1}.$$

5. $(u_n)_{n\geq n_0+1}$ est décroissante et minorée par $u_{n_0}-\frac{1}{6(n_0-1)}$, donc est convergente. Si on note l sa limite, on a alors en utilisant la continuité de l'exponentielle en l : $\frac{n!}{\sqrt{n}(n/\mathrm{e})^n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}^l$.

6. On sait que $I_{2n}\sim\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$. Par ailleurs, l'expression de I_{2n} donnée par la question 3 de la première partie et l'équivalent précédent fournit :

$$I_{2n}=\frac{(2n)!}{4^n(n)!^2}\frac{\pi}{2}\sim K\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\frac{1}{K^2.n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}\frac{1}{4^n}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{K\sqrt{2n}}$$

après nettoyage. On obtient donc en comparant les deux équivalents puis en mutipliant par $\sqrt{n}$:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sim\frac{\pi}{K\sqrt{2}}.$$

Mais deux suites constantes qui sont équivalentes sont égales[2], donc $\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\pi}{K\sqrt{2}}$, puis $K=\sqrt{2\pi}$. ■

[2]pourquoi, au fait ?