1 Deux factorisations

1. Les racines complexes de P_n sont les $z \in \mathbb{C}$ tels que $P_n(z) = 0$, c'est-à-dire $(1+z)^n - z^n = 0$. Puisque 0 n'est visiblement pas racine de P_n, on cherche donc les complexes $z \neq 0$ vérifiant $\left(\frac{1+z}{z}\right)^n = 1$, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $\frac{1+z}{z} = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, équation qu'on note E_k dans la suite.
   Fixons donc $k \in [\![0, n-1]\!]$: E_k est équivalente à $z\left(\mathrm{e}^{2ik\pi/n} - 1\right) = 1$. Pour $k = 0$, cette équation n'a pas de solution. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathrm{e}^{2ik\pi/n} \neq 1$, donc E_k possède pour unique solution le complexe :
$$z_k = \frac{1}{\mathrm{e}^{2ik\pi/n} - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{ik\pi/n} 2i \sin \frac{k\pi}{n}} = \frac{-i\mathrm{e}^{-ik\pi/n}}{2 \sin \frac{k\pi}{n}} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n}.$$
   Lorsque k décrit $[\![1, n-1]\!]$, $\frac{k\pi}{n}$ prend $n-1$ valeurs différentes dans l'intervalle $]0, \pi[$, sur lequel la fonction cotan est injective, donc les cotan $\frac{k\pi}{n}$ prennent $n-1$ valeurs distinctes, et il en va donc de même pour les z_k.
   Ainsi, P_n est de degré $n-1$ et possède $n-1$ racines distinctes. Comme la somme des multiplicités vaut $n-1$, chacune de ces multiplicités vaut 1.

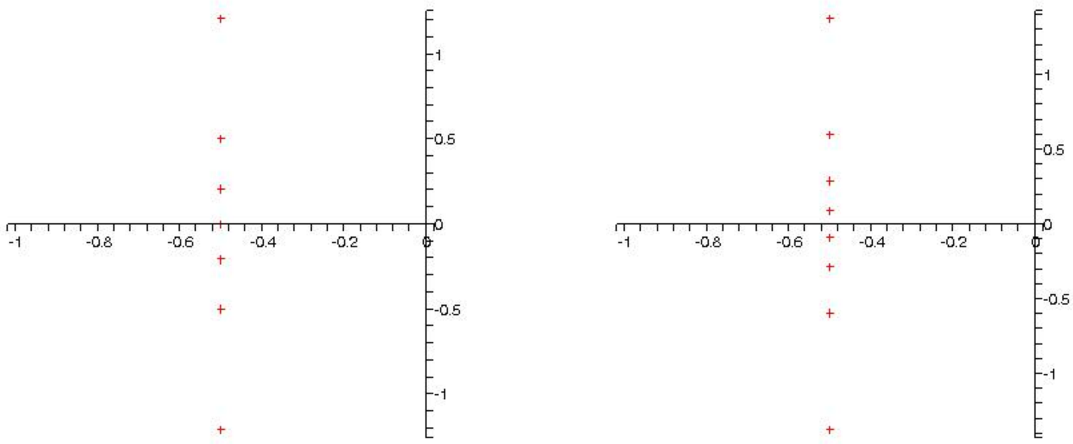

FIG. 1 – Les racines de P_n, pour $n = 8$ et $n = 9$

2. Le théorème de factorisation du cours fournit directement (en prenant garde au coefficient dominant) :
$$P_n = n \prod_{k=1}^{n-1} (X - z_k).$$

3. P_{2n} possède $2n-1$ racines : l'une est $-\frac{1}{2}$; les autres peuvent se regrouper par paires de conjuguées :
$$z_{2n-k} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{cotan} \frac{(2n-k)\pi}{2n} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{2n} = \overline{z_k}.$$

La factorisation sur $\mathbb{R}[X]$ s'obtient alors en regroupant les termes conjugués :

$$\begin{aligned} P_{2n} &= \prod_{k=1}^{2n-1}(X - z_k) = \left(X + \frac{1}{2}\right)\prod_{k=1}^{n-1}(X - z_k)(X - \overline{z_k}) \\ &= \left(X + \frac{1}{2}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 + X + \frac{1}{4}\left(1 + \operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n}\right)\right) \end{aligned}$$

2 Polynôme de Jourdan

1. Les fonctions ch et sh sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$; elles sont respectivement paire et impaire, avec $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$. Puisque ch est à valeurs > 0, la fonction sh est strictement croissante. Cette stricte croissance, la continuité et les limites (évidentes) en $\pm\infty$ assurent que sh réalise uue bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. La stricte croissance de sh (ou la connaissance de la fonction exponentielle !) nous assure que pour $x > 0$, on a $\mathrm{sh}\, x > \mathrm{sh}\, 0 = 0$, donc ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (oui oui, pas seulement $\mathbb{R}_+^*$).

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(t)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\mathrm{sh}(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\mathrm{sh}'(t)$		$-$	0	$+$	

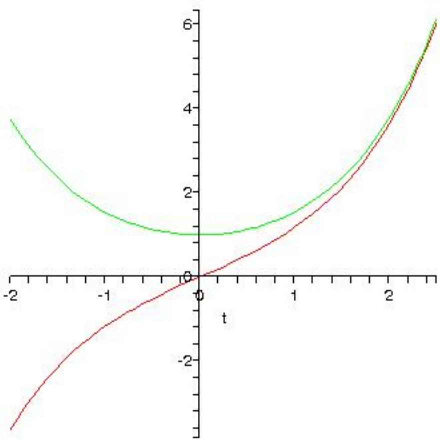

FIG. 2 – Le graphe des fonctions sinh et cosh

2. Pour la relation $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\, a\,\mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a\,\mathrm{sh}\, b$, il suffit de calculer les deux membres et constater qu'ils sont égaux ! Pour $\mathrm{sh}(a+b)$, il semble raisonnable de chercher une formule ressemblant aux formules de trigonométrie usuelle ($\sin(a+b) = \ldots$). On observe donc $\mathrm{sh}\, a\,\mathrm{ch}\, b = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{a+b} - \mathrm{e}^{-a+b} + \mathrm{e}^{a-b} - \mathrm{e}^{-a-b})$ et $\mathrm{ch}\, a\,\mathrm{sh}\, b = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{a+b} - \mathrm{e}^{a-b} + \mathrm{e}^{-a+b} - \mathrm{e}^{-a-b})$, de sorte que :

$$\mathrm{sh}\, a\,\mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, b\,\mathrm{ch}\, a = \frac{1}{4}(2\mathrm{e}^{a+b} - 2\mathrm{e}^{-a-b}) = \mathrm{sh}(a+b)$$

3. Vu ce qui précède[1] : $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}(t-t) = \operatorname{ch} 0 = 1$.
4. Sereinement :
$$\operatorname{ch}(2t) = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t + (\operatorname{ch}^2 t - 1) = 2\operatorname{ch}^2 t - 1,$$
et de même :
$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(3t) &= \operatorname{ch}(2t+t) = \operatorname{ch}(2t)\operatorname{ch} t + \operatorname{sh}(2t)\operatorname{sh} t = (2\operatorname{ch}^2 t - 1)\operatorname{ch} t + 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t \\ &= \operatorname{ch} t\left(2\operatorname{ch}^2 t - 1 + 2(\operatorname{ch}^2 t - 1)\right) = \operatorname{ch} t(4\operatorname{ch}^2 t - 3) = 4\operatorname{ch}^3 t - 3\operatorname{ch} t, \end{aligned}$$
et on remarque[2] la similarité avec la formule donnant $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
5. On fait une preuve par récurrence (double) pour montrer la proposition $\mathcal{P}(n)$: « Il existe $J_n \in \mathbb{R}_n[X]$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(nt) = J_n(\operatorname{ch} t)$ ».
   – $\operatorname{ch}(0t) = 1$, donc il suffit de prendre $J_0 = 1$ pour avoir $\operatorname{ch}(0t) = J_0(\operatorname{ch} t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui établit $\mathcal{P}(0)$. De même, il suffit de considérer $J_1 = X$ et $J_2 = 2X^2 - 1$ pour prouver $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$.
   – Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ vérifiées. On a alors $\operatorname{ch}((n+1)t) = \operatorname{ch}(nt)\operatorname{ch} t + \operatorname{sh}(nt)\operatorname{sh} t$ et $\operatorname{ch}((n-1)t) = \operatorname{ch}(nt)\operatorname{ch} t - \operatorname{sh}(nt)\operatorname{sh} t$ donc $\operatorname{ch}((n+1)t) + \operatorname{ch}((n-1)t) = 2\operatorname{ch}(nt)\operatorname{ch} t$, donc
   $$\operatorname{ch}((n+1)t) = 2(\operatorname{ch} t)J_n(\operatorname{ch} t) - J_{n-1}(\operatorname{ch} t) = J_{n-1}(\operatorname{ch} t),$$
   pour peu qu'on ait la bonne idée de définir :
   $$J_{n+1} = 2XJ_n - J_{n-1}.$$
   J_{n+1} est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.
   – Le principe de récurrence permet de conclure.

   Quelques remarques : déjà, une proposition "$\operatorname{ch}(nt) = J_n(\operatorname{ch} t)$" est absurde : si on prend J_n et t au hasard, il y a peu de chances pour que cette relation soit vérifiée... ensuite, pour récurrer doublement, il est essentiel de vérifier $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ (au moins) : $\mathcal{P}(0)$ ne suffit pas. Ensuite, ceux qui affirment « donc $J_{n+1} = ...$ » affirment que J_{n+1} vaut nécessairement... et donc ne prouvent pas l'existence. Accessoirement, ce « donc » n'est en général pas justifié. Doublement perdu...
6. Sous les hypothèses de l'énoncé, on a $J_n(\operatorname{ch} t) = R_n(\operatorname{ch} t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit encore[3] : $(J_n - R_n)(\operatorname{ch} t) = 0$. Or, lorsque t décrit $\mathbb{R}$, $\operatorname{ch} t$ décrit $[1, +\infty[$, donc :
$$\forall x \geq 1, \qquad (J_n - R_n)(x) = 0,$$
donc le polynôme $J_n - R_n$ possède une infinité de racines, donc est nul. On a bien montré : $J_n = R_n$.
7. On a déjà vu des polynômes qui convenaient (pour $n \in \{0, 1, 2\}$), et l'unicité nous permet d'affirmer qu'on a bien trouvé J_0, J_1 et J_2. Par ailleurs, $\operatorname{ch}(3t) = 4\operatorname{ch}^3 t - 3\operatorname{ch} t$ nous assure que $J_3 = 4X^3 - 3X$. Enfin,
$$\operatorname{ch}(4t) = 2\operatorname{ch}^2(2t) - 1 = 2(2\operatorname{ch}^2 t - 1)^2 - 1 = 8\operatorname{ch}^4 t - 8\operatorname{ch}^2 t + 1,$$
donc $J_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
8. La relation prouvée à la question 5 donnait uue forme *suffisante* de J_{n+1}, mais l'unicité nous assure que c'est relation est *nécessaire* : elle est donc vérifiée par J_n. Maintenant, cela fournit :
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad J_{n+1}(\cos\theta) = 2(\cos\theta)J_n(\cos\theta) - J_{n-1}(\cos\theta).$$
Mais on a $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos\theta$, soit encore :
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos((n+1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos\theta - \cos((n-1)\theta),$$
donc on montrerait par récurrence double[4] que $J_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

[1] si ce calcul est trop incroyablement mystérieux... ben repasser aux exponentielles : n'y passez pas la journée
[2] hu hu !
[3] attention, il ne s'agit pas d'un produit ; je sais qu'il est utile de le préciser !!!
[4] vous ne voyez pas comment ? essayez !

9. Les premiers J_n nous laissent penser que J_n est de degré n, et de coefficient dominant 2^{n-1} (sauf pour J_0, de coefficient dominant 1). Ces relations se montrerait par récurrence double, vu la relation : $J_{n+1} = 2XJ_n - J_{n-1}$. En effet, si on suppose le propriété $\mathcal{P}(k)$ « J_k est de degré k et coefficient dominant 2^{k-1} » vérifiée aux rang n et $n-1$, alors $2XJ_n$ a pour terme dominant $2^n X^{n+1}$ et J_{n-1} a pour terme dominant $2^{n-1}X^{n-1}$ (ou 1, si $n=1$), donc J_{n+1} a pour terme dominant $2^n X^{n+1}$, et c'est gagné.

   Pour le coefficient constant, c'est plus délicat, mais les premiers termes peuvent nous laisser penser que pour n impair, le coefficient constant est nul (en fait, on pourrait même montrer que J_n est impair...) et pour n pair, le coefficient vaut alternativement 1 et -1. On pourrait montrer cela en prouvant la proposition $\mathcal{P}(k)$: « le coefficient constant de J_{2k+1} est nul, et celui de J_{2k} vaut $(-1)^k$ ». La relation $J_{n+1} = 2XJ_n - J_{n-1}$ appliquée avec $n = 2k+1$ puis $n = 2k+2$ nous permet de prouver cette proposition par récurrence (simple).

10. En dérivant la relation définissant J_n, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$: $n \operatorname{sh}(nt) = \operatorname{sh} t J_n'(\operatorname{ch} t)$, puis

$$n^2 \operatorname{ch}(nt) = \operatorname{ch} t J_n'(\operatorname{ch} t) + \operatorname{sh}^2 t J_n'(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch} t J_n'(\operatorname{ch} t) + (\operatorname{ch}^2 t - 1) J_n'(\operatorname{ch} t),$$

   donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad (\operatorname{ch}^2 t - 1) J_n(\operatorname{ch} t) + \operatorname{ch} t J_n'(\operatorname{ch} t) - n^2 J_n(\operatorname{ch} t) = 0.$$

   Mais lorsque t décrit $\mathbb{R}$, $\operatorname{ch} t$ décrit $[1, +\infty[$, donc :

$$\forall x \geq 1, \qquad (x^2 - 1) J_n(x) + x J_n'(x) - n^2 J_n(x) = 0.$$

   Le polynôme $(X^2 - 1)J_n + XJ_n' - n^2 J_n$ possède donc une infinité de racines : il est forcément nul.

11. Déjà, $\operatorname{sh}(2t) = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$; ensuite,

$$\operatorname{sh}(3t) = \operatorname{sh}(2t) \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch}(2t) = \operatorname{sh} t \left(2 \operatorname{ch}^2 t + (2 \operatorname{ch}^2 t - 1)\right),$$

   et enfin :

$$\operatorname{sh}(4t) = 2 \operatorname{sh}(2t) \operatorname{ch}(2t) = 4 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t (2 \operatorname{ch}^2 t - 1)^2.$$

   Après avoir observé les premiers termes, on peut raisonnablement espérer montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $R_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (« polynôme de Ridde ») tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sh}(nt) = (\operatorname{sh} t) R_n(\operatorname{ch} t).$$

   On montrerait ensuite que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(n\theta) = (\sin\theta) R_n(\cos\theta)$, et on retrouve ainsi les « polynômes de Tchebichev de seconde espèce ».