1 Généralités

1. Trivial (f est 2π-péiriodique) ; left to the reader.
2. Supposons : $f(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix))$. On a alors par simple inégalité triangulaire :
$$|f(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} (|a_i| \, |\cos(ix)| + |b_i| \, |\sin x|) \leq \sum_{i=0}^{n} (|a_i| + |b_i|) \,.$$
Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est donc majorée par $\sum_{i=0}^{n} (|a_i| + |b_i|)$. A fortiori, son plus petit majorant, $N(f)$ est également majoré par ce réel.
3. La dérivée k-ème de $\cos(ix)$ vaut plus ou moins $i^k \cos(ix)$ ou plus ou moins $i^k \sin(ix)$. $f^{(k)}(x)$ reste donc une combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto \cos(ix)$ et $x \mapsto \sin(ix)$, donc est dans $\mathcal{T}_n$.
4. Déjà, $\sin(nx - \varphi) = (-\sin\varphi)\cos(nx) + \cos\varphi \sin(nx)$, donc $s \in \mathcal{T}_n$. Ensuite, $|s|$ est clairement majorée par 1 (regarder l'expression initiale !), et par ailleurs en prenant $x_0 = \frac{1}{n}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, on a $s(x_0) = 1$, donc $N(s) = 1$. Enfin, $s'(x) = n\cos(nx - \varphi)$, donc $N(s') \leq n$, et même $N(s') = n$ (regarder $s'\left(\frac{\varphi}{n}\right)$) : c'est gagné.

2 Zéros des polynômes trigonométriques

1. Tentons $f_0(x) = \sin(nx)$: $\sin\theta = 0$ dès que θ est un multiple de π : par exemple $0, \pi, ..., (2n-1)\pi$. f_0 s'annule donc en $0, \frac{\pi}{n}, \dots, \frac{2n-1}{n}\pi$. Tous ces points sont bien dans $[0, 2\pi[$. Réciproquement, si $f_0(x) = 0$ avec $x \in [0, 2\pi[$, alors $\sin(nx) = 0$, donc nx est de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $x = \frac{k}{n}\cdot$ La condition $0 \leq x < 2\pi$ impose alors $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, et les $2n$ racines exhibées étaient bien les seules dans $[0, 2\pi[$.
2. Notons $x_1, ..., x_{2n+1}$ $2n+1$ points (distincts !) d'annulation de f sur $[0, 2\pi[$, rangés par ordre croissant. f étant continue sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$ et dérivable sur $]x_k, x_{k+1}[$, le théorème de Rolle nous assure l'existence de $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $f'(y_k) = 0$. Ceci est valable pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, ce qui fournit $2n$ racines pour f'.
Cela dit, f (et aussi f') sont 2π-périodiques. On va donc regarder ce qui se passe entre x_{2n+1} et $x_1 + 2\pi$. Le lecteur fait alors un très joli dessin où on voit 0, 2π, x_1, x_{2n+1}, et $x_1 + 2\pi$: Rolle nous assure l'existence de $y_0 \in]x_{2n+1}, x_1 + 2\pi[$ tel que $f'(y_0) = 0$.
Si $y_0 \in]x_{2n+1}, 2\pi[$, on a notre dernière racine de f' dans $[0, 2\pi[$ et c'est gagné. Sinon, $y_0 \in [2\pi, x_1 + 2\pi[$, mais alors $y_0 - 2\pi$ est dans $[0, x_1[$, donc dans $[0, 2\pi[$, et est racine de f' par 2π-périodicité de cette dernière, et c'est gagné à nouveau.
Une récurrence à peu près évidente nous assure alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ possède $2n+1$ racines sur $[0, 2\pi[$: le passage de k à $k+1$ consiste à appliquer le résultat précédent à $f^{(k)}$. On a prouvé « si g s'annule $2n+1$ fois, alors g' également », et c'est ce résultat qu'on utilise pour prouver $\mathcal{P}(k)$: « $f^{(k)}$ s'annule $2n+1$ fois ».
3. Les fonctions sin et cos étant égales à leurs dérivées quatrièmes (et aussi $4k$-èmes !), on a quasiment immédiatement :
$$g_k(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{4k} (a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix)) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \varepsilon_k(x),$$
avec $\varepsilon_k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^{4k} (a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix))$, de sorte que $\varepsilon_k \in \mathcal{T}_n$ (et même $\varepsilon_k \in \mathcal{T}_{n-1}$).

Par inégalité triangulaire, puis en majorant les $|\sin|$ et $|\cos|$ par 1, puis les termes $\left(\dfrac{i}{n}\right)^{4k}$ par $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{4k}$, on obient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\varepsilon_k(x)| \leq \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^{4k}(|a_i|\,|\cos(ix)| + |b_i|\,|\sin(ix)|)$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n-1}(|a_i| + |b_i|)\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{4k} = \alpha_k.$$

Ainsi, $|\varepsilon_k|$ est majorée sur $\mathbb{R}$ par α_k donc $N(\varepsilon_k) \leq \alpha_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (suite géométrique de raison dans $[0,1[$).

On montrerait de la même façon :

$$N(\varepsilon'_k) \leq (n-1)\alpha_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. En notant de façon classique $K = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, on a $\dfrac{a_n}{K}$ et $\dfrac{b_n}{K}$ qui ont la somme de leurs carrés égale à 1. Il existe donc φ tel que $\dfrac{a_n}{K} = \cos\varphi$ et $\dfrac{b_n}{K} = \sin\varphi$. On a alors :
$$h_n(x) = K(\cos\varphi\cos(nx) + \sin\varphi\sin(nx)) = K\cos(nx-\varphi).$$
$h_n(x) = 0$ si et seulement si $nx - \varphi$ est de la forme $\dfrac{\pi}{2} + r\pi$, avec $r \in \mathbb{Z}$, soit encore : $x = \dfrac{1}{n}\left(\varphi + \dfrac{\pi}{2} + r\pi\right)$. Il existe une infinité de tels points, et ils sont séparés les uns des autres de $\dfrac{\pi}{n}\cdot$ On en trouve donc exactement $2n$ sur $[0, 2\pi[$.
Par ailleurs, $h'_n(x) = -nK\sin(nx-\varphi)$. Lorsque $nx - \varphi$ est de la forme $\dfrac{\pi}{2} + r\pi$, son sinus vaut ± 1, et donc en chacun des points en lesquels h_n s'annule, on a $|h'_n(x)| = nK$.
5. C'est de loin la question la plus fine du problème. Comme la dérivée de h_n est de valeur absolue fixée en les racines de h_n et que $N(\varepsilon_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on va voir qu'au voisinage des racines de h_n, g_n est strictement monotone, donc peut s'annuler au plus une fois (pour chaque voisinage). En dehors de ces voisinages, $|h_n|$ est minorée par une constante strictement positive, qui sera plus grande que $|\varepsilon_k(x)|$, interdisant à g_k de s'annuler en dehors de ces voisinages. Les dépendances mutuelles étant cruciales, il convient de préciser cela...
La continuité de h_n en chacune de ses racines nous assure l'existence de $\alpha > 0$ tel que sur chaque intervalle $[x-\alpha, x+\alpha]$ (avec x racine de h_n), on a $|h'_n(t)| \geq \dfrac{Kn}{2}\cdot$ Puisque $N(\varepsilon'_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $N(\varepsilon'_k) \leq \dfrac{Kn}{4}\cdot$ On a alors :
$$\forall t \in [x-\alpha, x+\alpha], \quad |g'_k(t)| = |h'_n(t) + \varepsilon'_k(t)| \geq |h'_n(t)| - |\varepsilon'_k(t)| \geq \frac{Kn}{2} - \frac{Kn}{4} = \frac{Kn}{4} > 0.$$
g'_k ne s'annule donc pas, donc reste de signe strict constant (TVI : g'_k est continue). g_k est donc strictement croissant, donc s'annule au plus une fois sur ce voisinage de x. Il reste à montrer que g_k ne s'annule pas en dehors de ces voisinages...
Sur $[0, 2\pi]$ privé de la réunion des $]x-\alpha, x+\alpha[$, $|h_n|$ est continue sur une réunion de segments (c'est pour cela qu'on a enlevé des ouverts), donc possède un minimum m. Ce minimum est strictement positif car on a exclu les racines de h_n. Puisque $N(\varepsilon_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe k_1 tel que pour $k \geq k_1$, on a $N(\varepsilon_k) \leq \dfrac{m}{2}\cdot$ Pour de tels k et t en dehors des $]x-\alpha, x+\alpha[$, on aura alors $|\varepsilon_k(t)| \leq \dfrac{m}{2} < m \leq |h_n(t)|$, interdisant d'avoir $\varepsilon_k(t) = -h_n(t)$, donc $g_k(t) = 0$.
Ainsi, pour $k \geq \mathrm{Max}(k_0, k_1)$, g_k possède au plus $2n$ racines sur $[0, 2\pi[$, donc f aussi d'après la question 2 : c'est absurde avec l'hypothèse faite dans cette partie.

6. Nous sommes sous l'hypothèse : $f \in \mathcal{T}_n$ possède au moins $2n+1$ racines sur $[0, 2\pi[$. La question précédente nous assure que $(a_n, b_n) = (0, 0)$. f est donc dans $\mathcal{T}_{n-1}$, et possède au moins $2(n-1)+1$ racines dans $[0, 2\pi[$, donc (en appliquant le résultat précédent !), $(a_{n-1}, b_{n-1}) = (0, 0)$... On montre ainsi que $f = 0$ (récurrence : pour $k \in [\![0, n]\!]$, on montre « $(a_{n-k}, b_{n-k}) = (0, 0)$ »). Ainsi :
Le seul élément de $\mathcal{T}_n$ qui s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[0, 2\pi[$ est la fonction nulle.
7. Soit $f \in \mathcal{T}_n$: si f s'annule en $\gamma \in \left[2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{7}\right[$, alors f s'annule également en $\gamma - 2\pi \in \left[0, \frac{\pi}{7}\right[$. Il y a donc autant de racines sur $[0, 2\pi[$ que sur $\left[\frac{\pi}{7}, 2\pi + \frac{\pi}{7}\right[$. Le résultat établi dans cette partie nous assure alors que $f \in \mathcal{T}_n$ non nulle ne peut s'annuler $2n+1$ fois sur $\left[\frac{\pi}{7}, 2\pi + \frac{\pi}{7}\right[$. Le même raisonnement nous assure que f ne peut s'annuler $2n+1$ fois sur $[\alpha, 2\pi + \alpha[$ (on écrit $\alpha = 2n\pi + \beta$, avec $0 \leq \beta < 2\pi$: f possède autant de racines sur $[\alpha, 2\pi + \alpha[$ que sur $[\beta, 2\pi + \beta[$ puis que sur $[0, 2\pi]$).

3 L'inégalité de Bernstein

1. Par 2π-périodicité, la borne supérieure de $|f'|$ sur $\mathbb{R}$ est égale à sa borne supérieure sur $[0, 2\pi]$. $|f'|$ est alors continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc sa borne supérieure est en fait un maximum : il existe $u \in [0, 2\pi[$ tel que $|f'(u)| = N(f')$ (on peut exclure 2π par 2π-périodicité). On a alors bien $f'(u) = \pm N(f')$.
Si $f'(u) = -N(f')$, alors avec $f_1 = -f$, on a $N(f_1) = N(f) < \frac{N(f')}{n} = \frac{N(f_1')}{n}$, et $f_1(u) = N(f_1)$, et on est ramené au premier cas.
2. Il suffit de constater que $\sin(n(x-u)) = (-\sin u)\cos(nx) + \cos u \sin(nx)$.
3. Et si on regardait les valeurs de h aux bornes de l'intervalles ?
$$h\left(u + \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) = \frac{N(f')}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - f\left(u + \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right).$$
Par ailleurs,
$$h\left(u + \frac{\pi}{2n} + (k+1)\frac{\pi}{n}\right) = \frac{N(f')}{n} \sin\left(\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right) - f\left(u + \frac{\pi}{2n} + (k+1)\frac{\pi}{n}\right).$$
Comme $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$, on va discuter selon la parité de k :
   - Si k est pair :
$$h\left(u + \frac{\pi}{2n} + (k+1)\frac{\pi}{n}\right) \geq \frac{N(f')}{n} - \left|f\left(u + \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right| \geq \frac{N(f')}{n} - N(f) > 0,$$
et
$$h\left(u + \frac{\pi}{2n} + (k+1)\frac{\pi}{n}\right) \leq -\frac{N(f')}{n} + \left|f\left(u + \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right| \leq -\frac{N(f')}{n} + N(f) < 0.$$
Comme h est continue sur $\left[u + \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}, u + \frac{\pi}{2n} + (k+1)\frac{\pi}{n}\right]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que h s'annule sur $\left]u + \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}, u + \frac{\pi}{2n} + (k+1)\frac{\pi}{n}\right[$ (on a exclu les bornes car h prend des valeurs non-nulles en ces points).
   - Même chose si k est impair (les signes sont inversés...).
4. $h'(x) = N(f')\cos(n(x-u)) - f'(x)$. En particulier, $h'(u) = N(f') - f'(u) = 0$.
Les $2n$ racines de h sur $I = \left[u + \frac{\pi}{2n}, u + \frac{\pi}{2n} + 2\pi\right[$ (question précédente) nous assurent, en Rollisant comme dans la partie précédente, que h' possède au moins $2n$ racines sur I, mais aussi sur tout intervalle de la forme $[\alpha, \alpha + 2\pi[$, en particulier $[u, u + 2\pi[$. Puisque $h'(u + 2\pi) = h'(u) = 0$, on obtient bien au moins $2n+1$ racines pour h' sur $[u, u + 2\pi]$.

5. $h''(x) = -nN(f')\sin(n(x-u)) - f''(x)$, donc $h''(u) = -f''(u) = 0$, car f' possède un maximum en u (par définition de u). h'' s'annule donc en u. Mais une Rollisation sur les $2n+1$ racines de h' sur $[u, u+2\pi]$ nous assure que h'' possède au moins $2n$ racines sur $]u, u+2\pi[$, et h'' possède bien au mois $2n+1$ racnes sur $[u, u+2\pi[$.

   D'après la seconde partie de ce problème, on doit avoir $h'' = 0$, donc h est affine. La seule possibilité pour une fonction affine d'être périodique est d'être constante, donc :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = h(u) = -f(u),$$

   puis :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{N(f')}{n}\sin(n(x-u)) + f(u).$$

6. On sait que $\dfrac{N(f')}{n} > N(f)$. On va s'en servir pour exhiber une valeur de f strictement plus grande que $N(f)$ (ou plus petite que $-N(f)$).
   - Si $f(u) \geq 0$: $f\left(u + \dfrac{\pi}{2n}\right) = \dfrac{N(f')}{n} + f(u) > N(f)$, ce qui est absurde avec la définition de $N(f)$.
   - De même, si $f(u) < 0$, $f\left(u - \dfrac{\pi}{2n}\right) = -\dfrac{N(f')}{n} + f(u) < -N(f)$, ce qui est également absurde avec la définition de $N(f)$.

7. En appliquant l'inégalité $N(g') \leq nN(g)$ à f' (qui est bien dans $\mathcal{T}_n$, ainsi que tous les $f^{(i)}$), on obtient $N(f'') \leq nN(f') \leq n^2N(f)$, puis par récurrence immédiate :

   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad N(f^{(k)}) \leq n^k N(f).$$

   Pour avoir égalité, il suffit de prendre $f(x) = \sin nx$: $N(f) = 1$, et $N'(f^{(k)}) = n^k$.