Inégalité de Bernstein

À rendre le 18 Janvier 2010

Soit n un entier strictement positif. L'ensemble des « polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n », noté $\mathcal{T}_n$, est l'ensemble des fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix)\right), \tag{D}$$

où les a_i et les b_i sont des constantes réelles. Par ailleurs, lorsque g est bornée sur $\mathbb{R}$, on note $N(g) = \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$.

1 Généralités

1. Vérifier que si $f \in \mathcal{T}_n$, alors f est périodique.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{T}_n$, alors f est bornée, et (avec les notations de (D) :
$$N(f) \leq \sum_{i=0}^{n} \left(|a_i| + |b_i|\right).$$
3. Montrer que si $f \in \mathcal{T}_n$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $f^{(k)}$ (la dérivée k-ième de f) est dans $\mathcal{T}_n$.
4. Soient $K, \varphi \in \mathbb{R}$, et $s : x \mapsto K \sin(nx - \varphi)$. Montrer que $s \in \mathcal{T}_n$, et que $N(s') = nN(s)$.

2 Zéros des polynômes trigonométriques

Par "racine" ou "zéro" de f, on entend : un point où f s'annule.

1. Exhiber $f_0 \in \mathcal{T}_n$ admettant exactement $2n$ racines distinctes dans $[0, 2\pi[$.
On suppose dans la suite de cette partie que $f \in \mathcal{T}_n$ s'annule (au moins) $2n+1$ fois sur $[0, 2\pi[$, et on va montrer que f est la fonction nulle. Ainsi, tout élément non nul de $\mathcal{T}_n$ admettra au plus $2n$ racines sur une période.
2. Montrer que f' s'annule en $2n+1$ points distincts de $[0, 2\pi[$, et qu'il en va de même pour toutes ses dérivées $f^{(k)}$.
3. On pose $g_k(x) = \dfrac{f^{(4k)}(x)}{n^{4k}}\cdot$ Calculer $g_k(x)$, et montrer que, avec les notations de (D), on a $g_k(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) + \varepsilon_k(x)$, avec $\varepsilon_k \in \mathcal{T}_n$, $N(\varepsilon_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et $N(\varepsilon'_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. On suppose ici : $(a_n, b_n) \neq (0,0)$. Montrer que $h_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ s'annule en exactement $2n$ points sur $[0, 2\pi[$, et calculer $|h_n'(x)|$ en chacun de ces points.
5. Montrer que si $(a_n, b_n) \neq (0,0)$, alors pour k assez grand, g_k ne peut s'annuler que $2n$ fois sur $[0, 2\pi[$.
6. Conclure.
7. Montrer que si $f \in \mathcal{T}_n$ est non nulle, alors f ne peut s'annuler $2n+1$ fois sur $\left[\frac{\pi}{7}, 2\pi + \frac{\pi}{7}\right[$. Même chose sur $[\alpha, 2\pi + \alpha[$.

3 L'inégalité de Bernstein

On va montrer ici que si $f \in \mathcal{T}_n$, alors $N(f') \leq nN(f)$. On fixe pour cela $f \in \mathcal{T}_n$, et on suppose : $N(f') > nN(f)$ (on veut arriver à une absurdité).

1. Justifier l'existence de $u \in [0, 2\pi[$ tel que $f'(u) = N(f')$ ou bien $f'(u) = -N(f')$. Comment ramener le second cas au premier ?
   Dans la suite, on suppose que $f'(u) = N(f')$, et on définit la fonction h par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = \left(\frac{1}{n} N(f') \sin\left(n(x-u)\right)\right) - f(x).$$

2. Vérifier que $h \in \mathcal{T}_n$.
3. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, h admet au moins un zéro sur $I_k = \left[u + \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}, u + \frac{\pi}{2n} + (k+1)\frac{\pi}{n}\right[$.
4. Calculer $h'(u)$, et montrer que h' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[u, u+2\pi]$.[1]
5. Calculer $h''(u)$, et montrer que h'' s'annule au moins $2n+1$ fois sur $[u, u+2\pi[$.[2] En déduire une expression explicite de h puis de f.
6. Conclure.
7. Montrer, pour tout $f \in \mathcal{T}_n$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$N(f^{(k)}) \leq n^k N(f).$$

   Si k et n sont fixés, exhiber un cas d'égalité (avec f non nulle !).

[1] NON, il n'y a pas d'erreur d'énoncé...
[2] Toujours pas...