1 Gardons la forme

1. On a bien entendu une forme indéterminée pour la limite éventuelle de f en 0. Mettons tout le monde sous même dénominateur, pour comparer des choses petites :
$$f(x) = \frac{x\cos x - \tan x}{x\tan x\cos x} = \frac{x\cos x - \tan x}{x\sin x}\cdot$$
Le dénominateur est équivalent à x^2, donc un DL à l'ordre 2 du numérateur devrait permettre de s'en sortir. Or
$$x\cos x - \tan x = x\left(1+o(x)\right) - \left(x+o(x^2)\right) = o(x^2),$$
donc $f(x) = \dfrac{o(x^2)}{x^2\left(1+o(1)\right)} = o(1)$, donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Attaquons la dérivée, en calculant d'abord calmement (partons de la forme sous même dénominateur) :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x\sin x\left(\cos x - x\sin x - (1+\tan^2 x)\right) - (x\cos x - \tan x)(\sin x + x\cos x)}{x^2\sin^2 x} \\ &= \cdots = \frac{-x^2 + \sin x\tan x - x\sin x\tan^2 x}{x^2\sin^2 x}\cdot \end{aligned}$$
Le dénominateur est équivalent à x^4. Pour le numérateur, on va donc travailler à l'ordre 4. Puisqu'il est pair, on ne s'intéresse qu'aux termes d'ordre 0 (il n'y en a pas !), ceux d'ordre 2 ($-1+1=0$), en enfin ceux d'ordre 4, à savoir : $-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}-1 = -\dfrac{5}{6}$, et ainsi le numérateur de $f'(x)$ est équivalent à $-\dfrac{5}{6}x^4$, et enfin :
$$f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{5}{6}\cdot$$
NDLR : Pourquoi 0^+ et pas 0 ? Mystère...
2. Dans les deux exponentielles, on factorise le terme principal, à savoir n :
$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n(1+1/n^3)^{1/3}\right) - \exp\left(n(1+1/n^2)^{1/2}\right) \\ &= \exp\left(n\left(1+o(1/n^2)\right)\right) - \exp\left(n\left(1+1/2n^2+o(1/n^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(n+o(1/n)\right) - \exp\left(n+1/2n+o(1/n)\right) \\ &= e^n\left(e^{o(1/n)} - e^{1/2n+o(1/n)}\right) \\ &= e^n\left((1+o(1/n)) - (1+1/2n+o(1/n))\right) \\ &= e^n\left(-1/2n+o(1/n)\right) \sim -\frac{e^n}{2n}\cdot \end{aligned}$$
3. Déjà, on a immédiatement au voisinage de $+\infty$:
$$f(x) = x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)^{1/4}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}\cos\frac{3}{x+1} \sim x;$$
on va donc chercher un développement asymptotique de la forme $f(x) = x + b + \dfrac{c}{x} + o(1/x)$, en calculant deux termes au delà de l'équivalent, pour chacun des trois membres du produit. D'une part, $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-1} = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + o(1/x^2)$.

Ensuite, en utilisant $(1+u)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}u + \underbrace{\frac{\frac{1}{4}\frac{-3}{4}}{2}}_{-\frac{3}{32}} u^2 + o(u^2)$:

$$\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}\frac{2}{x} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{12}{32}\right)}_{-\frac{1}{8}} \frac{1}{x^2} + o(1/x^2);$$

et enfin : $\frac{3}{x+1} \sim \frac{3}{x}$, donc $\cos\frac{3}{x+1} = 1 - \frac{9}{2x^2} + o(1/x^2)$. Il reste à multiplier tout cela !

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o(1/x^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(1/x^2)\right)\left(1 - \frac{9}{x^2} + o(1/x^2)\right) \\
&= x\left(1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + 1\right)}_{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} + \underbrace{\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 1\right)}_{\frac{11}{8}} \frac{1}{x^2} + o(1/x^2)\right)\left(1 - \frac{9}{2x^2} + o(1/x^2)\right) \\
&= x\left(1 + \frac{3}{2x} + \underbrace{\left(-\frac{9}{2} + \frac{11}{8}\right)}_{-\frac{25}{8}} \frac{1}{x^2} + o(1/x^2)\right) = x + \frac{3}{2} - \frac{25}{8x} + o(1/x).
\end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) - \left(x + \frac{3}{2}\right) \sim -\frac{25}{8x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^-$, donc le graphe Γ de f possède pour asymptote la droite Δ d'équation $y = x + \frac{3}{2}$, avec Γ situé sous Δ au voisinage de $+\infty$.

```
f:=x->x*(x**4+2*x**3+x**2+1)**(1/4)/(x-1)*cos(3/(x+1)):
plot({f(x),x+3/2},x=1..20);
```

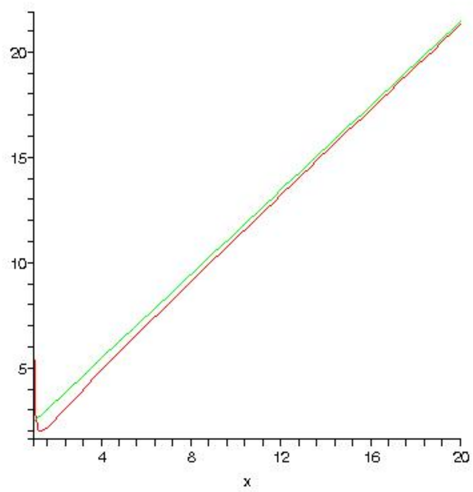

FIG. 1 – Le graphe de f et son asymptote

2 Première évaluation d'une vitesse de convergence

Soit $f : x \mapsto 1 + x - \sqrt{|x|}$. Commençons par étudier les propriétés habituelles de f (variations, signe de $f(x) - x$). f est bien entendu continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, avec

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_-^*$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$, puis sur $\mathbb{R}^-$ (pourquoi au fait ?). Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = 0$ si et seulement si $\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{4}$, et $f'(x) > 0$ si et seulement si $\sqrt{x} > \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $x > \dfrac{1}{4}$, d'où les variations de f. Les limites étant claires (vraiment, au fait ?), on peut passer au tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Le signe de $f(x) - x = 1 - \sqrt{|x|}$ est clair : $f(x) = x$ si et seulement si $\sqrt{|x|} = 1$, c'est-à-dire $x = \pm 1$, et $f(x) > 0$ si et seulement si $\sqrt{|x|} < 1$, c'est-à-dire $|x| < 1$, soit encore $-1 < x < 1$.

1. Supposons $u_0 \in]-1, 1[$. Attention, cet intervalle n'est pas stable par f (puisque $f(0) = 1$). On va plutôt s'intéresser à $]-1, 1]$.

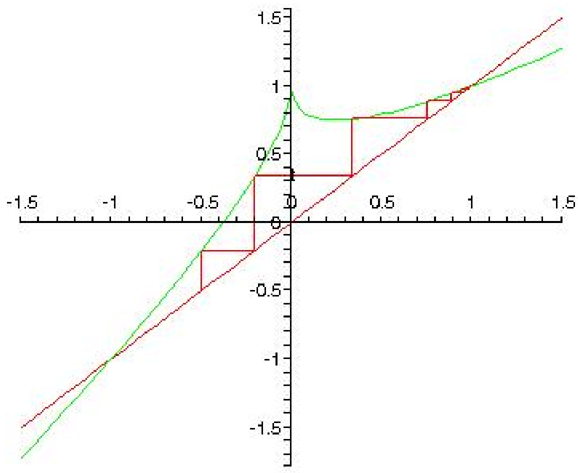

Fig. 2 – L'escalier habituel

Les variations strictes de f nous assurent que $f(]-1, 0]) \subset]-1, 1]$ (il y a même égalité grâce à la continuité et au théorème des valeurs intermédiaires...), $f([0, 1/4]) \subset [3/4, 1]$ et $f([1/4, 1] \subset [3/4, 1]$, donc $f(]-1, 1]) \subset]-1, 1]$. u_0 appartient donc à l'intervalle stable $I =]-1, 1]$, et une récurrence immédiate nous assure alors que tous les u_n appartiendront à cet intervalle. Mais sur cet intervalle, on a $f(x) \geq x$, donc on aura $f(u_n) \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$. Ainsi, la suite u est croissante et majorée par 1, donc converge vers une limite l, et l'inégalité $u_0 \leq u_n \leq 1$ passée à la limite fournit même $u_0 \leq l \leq 1$, donc $l \in]-1, 1]$ (puisque $u_0 > -1$). Les arguments usuels fournissent par ailleurs $f(l) = l$, donc $l = \pm 1$, et finalement : $l = 1$.

2. Supposons maintenant : $u_0 = 2$. Un petit dessin pour commencer...

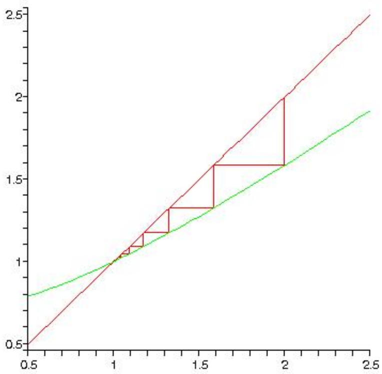

FIG. 3 – Encore une situation classique

On montrerait successivement :
- $J = [1, 2]$ est stable par f ;
- tous les u_n appartiennent à J ;
- u est décroissante (rappel : $f(x) \leq x$ sur J) ;
- u est convergente vers l appartenant à J (passage à la limite de l'inégalité $1 \leq u_n \leq 2$) et vérifiant $f(l) = l$.

Et ainsi :

$$u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1.$$

3. On suppose enfin : $u_0 = -2$.

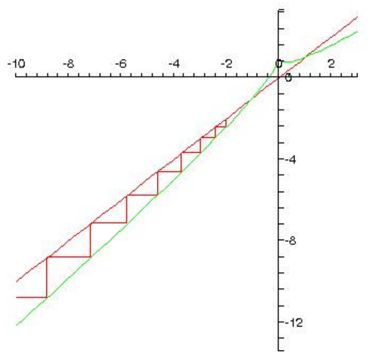

FIG. 4 – Rien de nouveau...

On montrerait successivement :
- $K =]-\infty, -1]$ est stable par f (au fait, appartenir à $]-\infty, -1]$, ça signifie quoi ?) ;
- tous les u_n appartiennent à K ;
- u est décroissante (rappel : $f(x) \leq x$ sur K) ;
- u n'est pas convergente, car une éventuelle limite l devrait vérifier $l \leq u_0 < -1$, et $f(l) = l$ donc $l = \pm 1$, ce qui est absurde.

La suite u est donc décroissante non convergente, et ainsi :

$$u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

4. Notons dès à présent que $v_n = u_n - 1$ est négatif. Cependant (et je ne m'étais pas rendu compte du problème au moment d'écrire l'énoncé) : si l'un des v_n est nul (c'est-à-dire $u_n = 1$), alors à partir de ce terme, tous les v_n sont nuls (puisque u_n est alors stationnaire à 1) ; on a donc $v_n = o(\rho^n)$ pour tout $\rho > 0$. Cependant, contrairement à ce qui était demandé à la fin de l'exercice, on a pas $\rho^n = o(v_n)$ pour $\rho < \dfrac{1}{2}\cdot$

   On suppose dans la suite que u_n ne prend jamais la valeur 1, de sorte que v_n reste à valeurs < 0...

   L'équivalent demandé s'obtient sans problème, sachant que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = u_n - \sqrt{|u_n|} = 1 + v_n - (1 + v_n)^{1/2} = \frac{1}{2}v_n + o(v_n) \sim \frac{1}{2}v_n.$$

5. D'après ce qui précède, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, donc $0 < \dfrac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{3}{5}$ pour n assez grand, disons $n \geq N_0$; et ensuite par récurrence immédiate :

$$\forall n \geq N_0, \qquad |v_n| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n-N_0} |v_{N_0}| = o\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right),$$

   cette dernière relation de négligeabilité venant du fait que $\dfrac{3}{5} < \dfrac{2}{3}\cdot$

   Remarques :
   - $\dfrac{3}{5}$ *pouvait être remplacé par n'importe quoi entre* $\dfrac{1}{2}$ *et* $\dfrac{2}{3}\cdots$
   - *Beaucoup ont utilisé/prouvé le lemme « si* $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in [0, 1[$*, alors* $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *» appliqué à* $\alpha_n = \dfrac{v_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$*, ce qui revient à très peu de choses près à ce que j'ai rédigé plus haut.*

6. L'utilisation du lemme susmentionné permet de traiter facilement les deux points demandés ici. Traitons les de façon élémentaire.
   - Supposons $\rho > \dfrac{1}{2}$: on reprend la preuve précédente, en remplaçant $\dfrac{3}{5}$ par n'importe quel réel strictement compris entre $\dfrac{1}{2}$ et ρ, et on aboutit de la même façon à la conclusion :

$$v_n = o(\rho^n).$$

   - Supposons maintenant : $\rho < \dfrac{1}{2}$, et choisissons α strictement compris entre ρ et $\dfrac{1}{2}$: il existe un rang N_0 au delà duquel $\dfrac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \geq \alpha$. On a alors pour tout $n \geq N_0$: $|v_n| \geq \alpha^{n-N_0} v_{N_0}$, et donc :

$$\forall n \geq N_0, \qquad \frac{\rho^n}{v_n} \leq \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^n \frac{\alpha^{N_0}}{v_{N_0}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

   car $0 < \dfrac{\rho}{\alpha} < 1$. Ceci prouve le résultat de l'énoncé :

$$\rho^n = o(v_n).$$

3 Un gros problème

3.1 Cas où a est constante

1. On a $2\alpha = 1 + \sqrt{5}$, donc $2\alpha - 1 = \sqrt{5}$ puis $(2\alpha - 1)^2 = 5$, soit enfin après simplification : $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$.
2. Du fait de la relation précédente, on a $f(\alpha) = \sqrt{\alpha^2} = \alpha$ (puisque $\alpha > 0$).

   Par ailleurs, f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2f(x)}$, et ainsi : $f'(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha}\cdot$

3. Une solution économique consiste à prouver la proposition $P(n)$ « $b_n \leq b_{n+1} \leq \alpha$ » par récurrence (sans problème grâce à la croissance, évidente, de f). La rédaction est laissée au lecteur...

   Une autre façon de faire consiste à montrer d'abord que tous les b_n sont dans $[0, \alpha]$ en utilisant le fait que $[0, \alpha]$ est stable par f et contient b_0. En utilisant alors le fait que $f(x) \geq x$ sur $[-1, \alpha]$, on obtient $f(u_n) \geq u_n$, ce qui nous donne la croissance de u.

   Pour établir le fait que $f(x) \geq x$ sur $[-1, \alpha]$, on peut étudier $g : x \mapsto f(x) - x$, comme d'habitude : cette fonction est strictement croissante sur $[-1, -3/4]$, strictement décroissante sur $[-3/4, +\infty[$, puis s'annule en un unique point sur $[-3/4, +\infty[$. Comme par construction on a $f(\alpha) = \alpha$ donc $g(\alpha) = 0$, l'affaire est pliée...

x	-1		$-\frac{3}{4}$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		$-$		
$g(x)$	1	$\nearrow$	$g(3/4)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4. Commençons par un petit dessin :

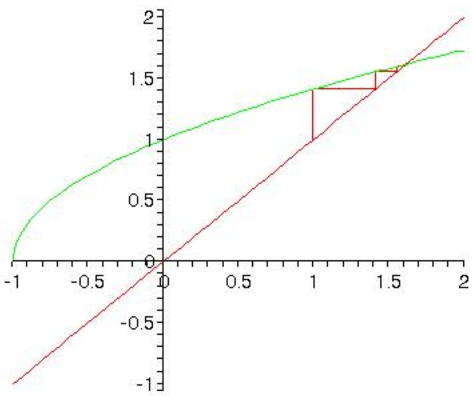

Fig. 5 – Mais comment attaquer ce type de situation ?

   La suite b est croissante majorée, donc converge vers une certaine limite $l \in [-1, \alpha]$ (comment obtient-on cette localisation de l, au fait ?). Les arguments déjà vus quelques fois nous donnent : $f(l) = l$. BIEN ENTENDU, il ne suffit pas de noter que α est UNE solution de cette équation : il faut prouver que c'est LA SEULE, ce qu'on a justement établi en pointillé dans l'étude de g de la question précédente.

5. Déjà, tous les ε_n sont strictement négatifs (dans la question 3, on pouvait montrer l'inégalité STRICTE $b_n < \alpha$ du fait de la stricte croissance de f). On peut donc considérer le rapport

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{b_{n+1} - \alpha}{b_n - \alpha} = \frac{f(b_n) - f(\alpha)}{b_n - \alpha}.$$

   Par définition de la dérivée, on a $\dfrac{f(t) - f(\alpha)}{t - \alpha} \underset{t \to \alpha}{\longrightarrow} f'(\alpha)$, et puisque $b_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \alpha$, on a bien $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f'(\alpha)$, ce qui est le résultat attendu.

6. Soit $\beta = \frac{1}{2{,}843}$: on a $\sqrt{5} > 2$, donc $\alpha > \dfrac{3}{2}$, puis $0 < f'(\alpha) < \dfrac{1}{3} < \beta$, de sorte que pour n assez grand, on aura $0 < \dfrac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \leq \beta$, d'où le résultat.

7. Par récurrence immédiate, on a :

$$\forall n \geq N, \qquad |\varepsilon_n| \leq \beta^{n-N} |\varepsilon_N|,$$

donc pour $n \geq N$, on a $\dfrac{|\varepsilon_n|}{\frac{1}{2^n}} \leq (2\beta)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0 < 2\beta < 1$: on a donc bien $\varepsilon_n = o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

3.2 Cas où a est à moitié constante !

1. Notons $c_n = b_{2n}$: on a :

$$c_{n+1} = b_{2n+2} = \sqrt{a_{2n+2} + b_{2n+1}} = \sqrt{b_{2n+1}} = \sqrt{\sqrt{a_{2n+1} + b_{2n}}} = (1 + c_n)^{1/4}.$$

2. Soit $h : x \mapsto \sqrt[4]{1+x}$: on a $c_{n+1} = h(c_n)$, et h est fondamentalement de même nature que f. La seule différence est la valeur de l'unique point fixe, qui n'est pas α, mais un réel β qui vaut environ $1,22$

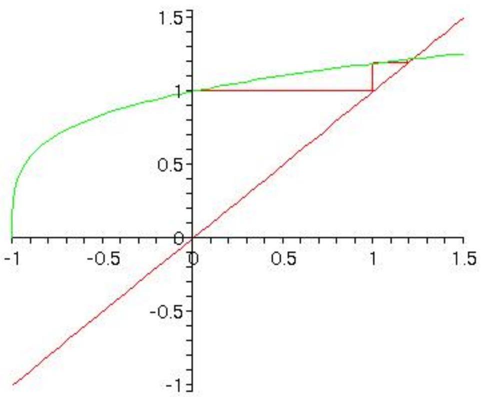

FIG. 6 – L'escalier pour les c_n

On montre sans problème par récurrence sur n la proposition « $c_n \leq c_{n+1} \leq 2$ » : ça passe à la récurrence du fait de la croissance de h, de la relation $h(2) = 3^{1/4} < 16^{1/4} = 2$, et enfin de l'initialisation $c_0 = b_0 = 0 \leq 1 = c_1 \leq 2$.

3. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par 2, donc converge vers une certaine limite l.
Après avoir défini une fonction b en Maple, on peut demander les premiers termes de (b_{2n}) :

```
h:=x->(1+x)**(1/4):b:=n->if n=0 then 0. else h(b(n-1)) fi:
seq(b(n),n=0..10);
0., 1., 1.189207115, 1.216386840, 1.220144849, 1.220661726, 1.220732766,
1.220742529, 1.220743871, 1.220744055, 1.220744081
```

donc il semblerait qu'on ait $1.22 < l < 1.23$.
A la calculatrice (Maple !), on obtient $1.61 < \alpha < 1.62$.

```
evalf(alpha);
        1.618033988
```

Il semble donc raisonnable de montrer : $l < \alpha$. La majoration $b_{2n} \leq 2$ est insuffisante, mais on peut essayer de montrer $b_{2n} \leq \dfrac{3}{2}$: on peut le faire par récurrence. En effet, si $x \leq \dfrac{3}{2}$, alors $h(x)^4 = \dfrac{5}{2}$ alors que $\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{81}{16} > \dfrac{5}{2}$, donc par stricte croissance de $x \mapsto x^4$, on a bien $h(x) < \dfrac{3}{2}$.

Ainsi, tous les b_{2n} sont $\leq \dfrac{3}{2}$, et leur limite également. C'est gagné puisque :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} > l.$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $b_{2n+1} = \sqrt{1+b_{2n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1+l}$ par continuité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
   Si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente vers l', on devrait avoir $b_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l'$ et $b_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l'$, donc $l = l' = \sqrt{1+l}$, puis $l = \alpha$: c'est exclu d'après la question précédente.

3.3 Cas où $a_n = n^\gamma$

1. Au vu de la feuille Maple, il semblerait que la suite b soit croissante « un peu comme la fonction racine ». Si $b_n \sim Kn^\alpha$ (avec $\alpha \neq 0$), on aura $\dfrac{\ln b_n}{\ln n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Puisque $\dfrac{\ln b_n}{\ln n}$ semble converger vers $\dfrac{1}{2}$, il est raisonnable de penser que $b_n \sim K\sqrt{n}$, et le troisième graphique nous laisse penser que $b_n \sim \sqrt{n}$ puisque le rapport semble tendre vers 1.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $\sqrt{n} \leq b_n \leq n$ » :
   - $\mathcal{P}(0)$ est bien vérifiée...
   - Si $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1+\sqrt{n} \leq b_n + a_{n+1} \leq 2n+1$, et donc en prenant la racine (croissante...), on obtient (lire du milieu vers les extrémités !) :

     $$\sqrt{n+1} \leq \sqrt{n+1+\sqrt{n}} \leq b_{n+1} \leq \sqrt{2n+1} \leq n+1,$$

     la dernière inégalité se prouvant « en prenant le carré » (puisque les termes sont positifs, on a bien ÉQUIVALENCE entre $a \leq b$ et $a^2 \leq b^2$) :

     $$\sqrt{2n+1} \leq n+1 \iff 2n+1 \leq n^2+2n+1$$

     Ceci établit $\mathcal{P}(n+1)$ et achève la récurrence.

   La minoration nous assure qu'il y a « divergence vers $+\infty$ » : $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
3. Pour $n \geq 1$, on a $\dfrac{b_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\dfrac{b_{n-1}}{n}}$: on ne peut pas conclure directement, mais $b_{n-1} \leq n-1 < n$, donc $\dfrac{b_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{2}$. Mais alors, $\dfrac{b_n}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{b_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc en injectant cette nouvelle information :

   $$\frac{b_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\frac{b_{n-1}}{n}} = \sqrt{1+\frac{b_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1} = 1,$$

   et enfin : $b_n \sim \sqrt{n}$
4. Les deux autres exemples de la feuille Maple laissent penser que lorsque $a_n = n^\gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $\gamma \in \mathbb{R}^+$ fixé, alors $b_n \sim n^{\gamma/2}$.
   Pour le prouver, on commence par prouver l'inégalité fournie dans l'énoncé : on le fait par récurrence, en utilisant le fait que si $x \leq \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $\sqrt{1+x} \leq \sqrt{1+\alpha} = \alpha$, et les inégalités suivantes valables pour $n \geq 2$ sous l'hypothèse $\dfrac{b_{n-1}}{(n-1)^{\gamma/2}} \leq \alpha$:

   $$\frac{b_n}{n^{\gamma/2}} = \sqrt{1+\frac{b_{n-1}}{n^\gamma}} \leq \sqrt{1+\frac{b_{n-1}}{(n-1)^{\gamma/2}}} \leq \sqrt{1+\alpha} = \alpha.$$

   On a alors $b_n = o(n^\gamma)$, donc également $b_{n-1} = o(n^\gamma)$ (c'est clair ?) puis :

   $$\frac{b_n}{n^{\gamma/2}} = \sqrt{1+\frac{b_{n-1}}{n^\gamma}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

3.4 Cas où a est croissante

1. Supposons : $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$. On a par définition $b_{n+1}^2 = a_{n+1} + b_n$ et donc pour $n \geq 1$, $a_n = b_n^2 - b_{n-1}$, donc $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b^2 - b$.
2. Récurrence rédigé au lance-pierres pour prouver « $b_{n+1} \geq b_n$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $b_1 = \sqrt{a_0 + b_0}$ et comme $b_0 \geq 0$ on a $b_1 \geq \sqrt{a_0}$ et donc $b_1 \geq b_0$.
   Supposons $b_{n+1} \geq b_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors comme la suite (a_n) est croissante, on a $a_{n+2} \geq a_{n+1}$ d'où $a_{n+2} + b_{n+1} \geq a_{n+1} + b_n$ et enfin $\sqrt{a_{n+2} + b_{n+1}} \geq \sqrt{a_{n+1} + b_n}$ ce qui donne bien $b_{n+2} \geq b_{n+1}$.
3. $\begin{cases} \beta \geq 0 \\ \beta = \sqrt{a+\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \geq 0 \\ \beta^2 = a + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \geq 0 \\ \beta^2 - \beta - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta \geq 0 \\ \beta = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \beta = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$
   car l'autre racine est négative (pourquoi au fait ?).
4. Au lance-pierres à nouveau, pour prouver « $b_n \leq \beta$ » :
   $b_0 = \sqrt{a_0}$ et $a_0 \leq a$ car la suite (a_n) est croissante et tend vers a. Ainsi, $b_0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{a+\beta}$ car $\beta \geq 0$ et donc $b_0 \leq \beta$ par définition de β.
   Supposons $b_n \leq \beta$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $a_{n+1} + b_n \leq a + \beta$, donc $\sqrt{a_{n+1} + b_n} \leq \sqrt{a+\beta} = \beta$, i.e. : $b_{n+1} \leq \beta$.
5. La suite (b_n) est croissante et majorée donc converge vers un réel b. La suite (b_n) étant positive, on a $b \geq 0$ par passage d'inégalité à la limite.
   La relation $b_{n+1} = \sqrt{a_n + b_n}$ « passée à la limite » (on regarde chaque membre, et on conclut par un argument d'unicité) fournit $b = \sqrt{a+b}$, et puisque $b \geq 0$:
   $$b = \beta = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

3.5 Cas général

1. Voir la question 1 de la partie 3.4.
2. Le cas $l = 0$ aurait dû être mis à part dans l'énoncé ; désolé... Dans ce cas, on a en effet $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On suppose maintenant que la suite a est constante égale à $l > 0$. On a alors $b_0 = \sqrt{l}$ et $b_{n+1} = \sqrt{l + b_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit l' l'unique[1] réel ≥ 0 tel que $l' = \sqrt{l + l'}$. Alors on a facilement par récurrence : $b_n \leq l'$. Ensuite, on prouve que (b_n) est croissante. Elle converge donc vers b positif tel que $b = \sqrt{l+b}$ ce qui donne $b = l'$ (puisque l' est l'unique réel vérifiant cette relation). Ainsi :
   $$b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l' = \frac{1+\sqrt{1+4l}}{2} = \varphi(l).$$
3. Il est clair que par définition de (a'_n), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq a'_n$. Il est alors immédiat de prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq b'_n$.
4. La suite (b'_n) vérifie la relation de récurrence $b'_{n+1} = \sqrt{l + \varepsilon_1 + b_n}$ pour tout $n \geq N$. Une telle suite s'étudie comme dans le cas où (a_n) est constante, mais en prenant garde au fait que le « premier terme » est b_N : c'est sa position vis à vis de $\varphi(l+\varepsilon_1)$ qui va imposer la monotonie. Plus précisément :
   - si $b_N = \varphi(l+\varepsilon_1)$, alors par récurrence immédiate, on a $b_n = \varphi(l+\varepsilon_1)$ pour tout $n \geq N$;
   - si $0 \leq b_N < \varphi(l+\varepsilon_1)$, alors on prouve par récurrence immédiate que pour tout $n \geq N$, on a b'_n qui appartient à l'intervalle $I = [0, \varphi(l+\varepsilon_1)]$, qui est stable par $\psi : x \mapsto \sqrt{l + \varepsilon_1 + x}$. Sur I, $\psi(x) \geq x$ donc (b'_n) est croissante, majorée par $\varphi(l+\varepsilon_1)$, donc converge vers l' vérifiant $\psi(l') = l'$: seul $\varphi(l+\varepsilon_1)$ vérifie cette relation.
   - si $\varphi(l+\varepsilon_1) < b_N$, alors on prouve par récurrence immédiate que pour tout $n \geq N$, on a $b_n \in J = [\varphi(l+\varepsilon_1), +\infty[$, qui est stable par ψ. Cette fois sur J, $\psi(x) \leq x$ donc (b'_n) est décroissante, puis tend vers $\varphi(l+\varepsilon_1)$ par les même arguments que précédemment.

[1] pour l'unicité, on a besoin du fait que l est strictement positif...

5. Supposons d'abord : $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$, et montrons qu'à partir d'un certain rang, on a

$$\varphi(l) - \varepsilon \leq b_n \leq \varphi(l) + \varepsilon.$$

Tout d'abord, φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $\varphi(l+\varepsilon_1) \leq \varphi(l) + \dfrac{\varepsilon}{2}\cdot$ On fixe ε_1 ainsi. Maintenant, la suite (b'_n) construite comme plus haut converge vers $\varphi(l+\varepsilon_1)$, donc on a $b'_n \leq \varphi(l+\varepsilon_1) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour n assez grand. Mais on a toujours $b_n \leq b'_n$, donc pour n assez grand :

$$b_n \leq b'_n \leq \varphi(l+\varepsilon_1) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(l) + \varepsilon.$$

En remplaçant $l + \varepsilon_1$ par $l - \varepsilon_1$, avec $\varphi(l-\varepsilon_1) \geq \varphi(l) - \dfrac{\varepsilon}{2}$, on obtiendrait de même l'existence d'un rang au delà duquel $\varphi(l) - \varepsilon \leq b_n$, ce qui permet de conclure :

$$b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(l).$$

Les plus attentifs auront noté que ça ne marche que si $\varepsilon < \varphi(l)$. Comment faire sinon ?

Passons maintenant au cas où $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si tous les a_n sont nuls, alors tous les b_n aussi, et on a $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Sinon, on va montrer que $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Fixons pour cela $\varepsilon > 0$. Il existe un terme a_N qui est strictement positif. On a alors $b_N = \sqrt{a_N + b_{N-1}} \geq a_N^{1/2}$, puis par récurrence immédiate $b_n \geq a_N^{1/2^{n-N}}$ pour tout $n \geq N$. (b_n) est donc minorée par une suite tendant vers 1, donc est plus grande que $1 - \varepsilon$ pour n assez grand. Par ailleurs, la technique vue plus haut permet de majorer b_n par $1 + \varepsilon$ pour n assez grand. Et ainsi :

$$b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Quelque chose me dit que plusieurs d'entre-vous n'auront pas traité correctement cette question `:-)`