1 Un peu d'arithmétique

1. Si p est divisible par 3, alors il s'écrit $p = 3k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, et on a alors
$$p^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3.(3k^2)...$$
2. Si p n'est pas divisible par 3, alors il s'écrit $p = 3k+r$, avec $r = 1$ ou 2. Mais $(3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$ et $(3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$, donc dans un cas comme dans l'autre, p^2 n'est pas divisible par 3.
3. Supposons $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, et écrivons $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, fraction supposée irréductible (simplifiée au maximum, de sorte qu'on ne peut pas avoir à la fois p et q divisibles par 3). On a alors $p^2 = 3q^2$, donc p^2 est divisible par 3, donc p aussi d'après la question précédente. Mais alors en écrivant $p = 3p'$, on arrive à $3p'^2 = q^2$, donc q^2 est divisible par 3, donc q aussi, et on obtient une contradiction (p et q sont tous les deux divisibles par 3, ce qui avait été exclu).
4. $\sqrt{45} = \sqrt{9.5} = 3\sqrt{5}$; on est donc amené à montrer que $\sqrt{5}$ est irrationnel. La méthode de la question précédente fonctionne, pour peu qu'on montre que si p^2 est divisible par 5, alors p l'est également. Il suffit de regarder $(5k+r)^2$, pour $r \in \{1, 2, 3, 4\}$. Dans chacun des cas, on constate que le carré n'est pas divisible par 5.
5. Evidemment, si p est divisible par 12, alors p^2 aussi. Mais la réciproque est fausse : regarder $p = 6$.
6. On peut montrer que $\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si... n est le carré d'un entier (cas triviaux). L'un des deux sens n'est pas trop compliqué... supposons maintenant que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, avec n qui n'est pas un carré d'entier. Dans la décomposition de n en facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$, il existe une puissance impaire (sinon...). Disons par exemple que p_1 apparaît à une puissance impaire. On écrit alors $p^2 = nq^2$. p_1 divise le membre de droite, donc aussi le membre de gauche, donc p_1 apparaît dans la décomposition de p en facteurs premiers. Mais alors, en regardant la puissance de p_1 à gauche et à droite, on voit que p_1 doit également apparaître dans la décomposition de q^2 donc de q, niant le caractère irréductible de l'écriture $\frac{p}{q}$.

2 Les premières d'une longue série

1. φ est dérivable, de dérivée $\varphi'(x) = 3x^2 - 12x + 8$, trinôme dont les racines sont $x_1 = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \in [0, 2]$ et $x_2 = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \in [2, 4]$. On en déduit les variations de φ :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f'x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Le signe de φ est clair, si on sait faire un tableau de signe : φ est > 0 sur $]0, 2[\cup]4, +\infty[$, < 0 sur $]-\infty, 0[\cup]2, 4[$, et nul en 0, 2 et 4.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
x		$-$	0			$+$			
$x-2$		$-$			0		$+$		
$x-4$			$-$				0	$+$	
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Il reste à représenter φ :

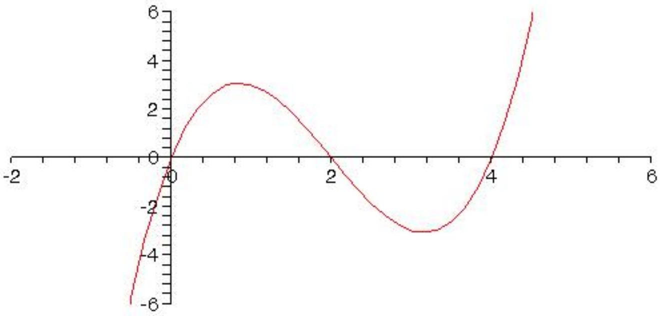

FIG. 1 – Graphe de φ

2. f est dérivable, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{10}(3x^2 - 12x + 18)$. Cette dérivée reste à valeurs strictement positives ($\Delta > 0$ par exemple...), donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

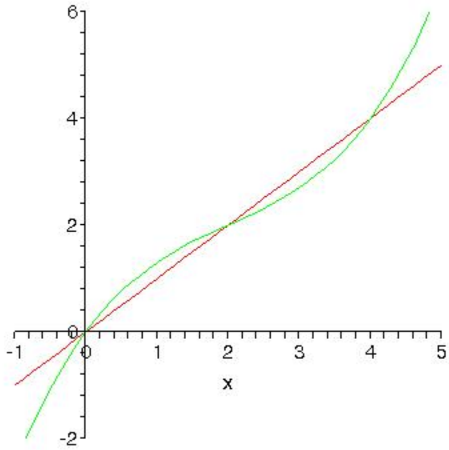

FIG. 2 – Graphe de f

3. La croissance de f, et le fait que 0, 2 et 4 sont points fixes nous assurent que $I_0 =]-\infty, 0]$, $I_1 = [0, 2]$, $I_2 = [2, 4]$ et $I_3 = [4, +\infty[$ sont stables par f. Précisons cela pour I_1 :
   Si $x \in I_1$, alors $0 \leq x \leq 2$, donc par croissance de f sur $\mathbb{R}_-$, on aura $0 = f(0) \leq f(x) \leq f(2) = 2$, donc $f(x) \in [0, 2] = I_1$. ■

   Bien entendu :
   – *Personne n'aura parlé de « $-\infty < y \leq 0$ ».*
   – *Ceux qui auront écrit d'inutiles équivalences les auront évidemment justifiées correctement.*
   – *Ceux qui ont préféré parler des intervalles ouverts auront justifié cela avec la stricte croissance. Bien entendu...*

4. Un petit dessin pour commencer :

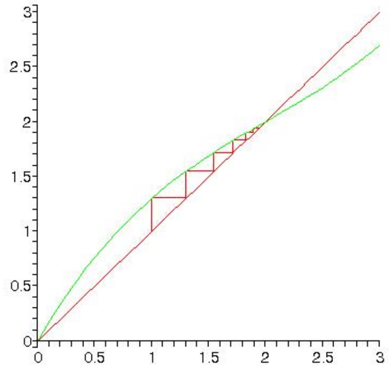

FIG. 3 – La construction usuelle

Supposons $u_0 = 1$. u_0 est alors dans l'intervalle I_2, qui est stable par f. Une récurrence immédiate nous assure alors que tous les u_n sont dans I_1. Comme c'est la première fois, rédigeons-là :

– On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in I_1$ ».
– $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée par hypothèse.
– Supposons $\mathcal{P}(n)$ vérifiée pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors $u_n \in I_1$, et puisque I_1 est stable par f, on en déduit $f(u_n) \in I_1$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in I_1$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.
– Le principe de récurrence nous permet de conclure : $\mathcal{P}(n)$ est bien vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $x \in I_1$, $f(x) \geq x$, or tous les u_n sont dans I_1, donc $u_{n+1} \geq u_n$, donc u est croissante et majorée par 2, donc convergente vers l vérifiant $f(l) = l$. La preuve doit contenir les buzzwords standards : continuité, suite extraite, unicité de la limite. Plus précisément (!) :

Par continuité de f en l, on a $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(l)$. (u_{n+1}) étant extraite de (u_n), on a $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$. Mais $u_{n+1} = f(u_n)$, donc par unicité de la limite : $l = f(l)$.

On a donc $l \in \{0, 2, 4\}$. L'encadrement $u_0 \leq u_n \leq 2$ passé à la limite fournit $1 = u_0 \leq l \leq 2$, donc $l = 2$:

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2.$$

5. Par exemple :

```
u:=n->if n=0 then 1 else f(u(n-1)) fi:
```

Pour information, le « dessin de l'escalier » a été réalisé grâce aux commandes suivantes :

```
s:=[u(0),u(0)]:
for i from 0 to 5 do s:=s,[u(i),u(i+1)],[u(i+1),u(i+1)] od:
plots[display]({plot([s]),plot({f(x),x},x=0..3)});
```

6. (a) Si $u_0 = 0$: $u_1 = f(u_0) = 0$, puis par récurrence immédiate, tous les u_n sont égaux à 0. La suite est constante.

   (b) Si $u_0 = 2$ ou $u_0 = 4$: le raisonnement précédent s'applique.

   (c) Si $u_0 = 3$, on montre comme dans le cas $u_0 = 1$ que tous les u_n sont dans $I_2 = [2, 4]$, puis (sachant que $f(x) \leq x$ sur cet intervalle) que la suite est décroissante et convergente vers une limite... qui ne peut être que 2 (même type de localisation de la limite que dans le premier cas).

   (d) Si $u_0 = -1 \in I_0$: I_0 est stable par f, donc tous les u_n sont dans I_0. Sur cet intervelle, $f(x) \leq x$, donc u est décroissante. Si elle admettait une limite finie l, celle-ci serait dans $\{0, 2, 4\}$. Mais l'inégalité $u_n \leq u_0$ passée à la limite fournit $l \leq -1$, ce qui est absurde. u est donc décroissante et non convergente, donc tend vers $-\infty$.

   (e) Le cas $u_0 = 5$ se traite comme lorsque $u_0 = -1$: tous les u_n sont dans $I_3 = [4, +\infty[$, puis : u est croissante et enfin divergente vers $+\infty$.