843 - 2009/2010 **DM 7**

À rendre le 7 Décembre 2009

1 Un peu d'arithmétique

On a vu en cours que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel...

1. Montrer que si p est divisible par 3, alors p^2 aussi.
2. Montrer que si p n'est pas divisible par 3, alors p^2 non plus.
   On pourra écrire $p = 3k + r$, avec $r = 1$ ou 2.
3. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
4. Montrer que $\sqrt{45} \notin \mathbb{Q}$.
5. A-t-on : « p est divisible par 12 si et seulement si p^2 est divisible par 12 » ?
6. Quand a-t-on $\sqrt{n}$ rationnel ?

2 Les premières d'une longue série

On note ici $\varphi : x \mapsto x(x-2)(x-4)$, et $f : x \mapsto x + \frac{1}{10}\varphi(x)$.

1. Étudier rapidement φ (en particulier, son signe...). Représenter son graphe.
2. Étudier les variations puis représenter le graphe de f.
3. Montrer que l'intervalle $I_1 = [0, 2]$ est stable par f (c'est-à-dire : si $x \in I_1$, alors $f(x) \in I_1$).
4. Étudier la suite définie par son premier terme $u_0 = 1$, et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On commencera par faire un dessin avec le graphe de f ainsi que la droite d'équation $y = x$, et la construction géométrique des 4 premiers termes de la suite. Ensuite, on localisera la suite (prouver que tous les u_n sont dans un certain intervalle...), puis on établira les variations et la convergence de u ; on déterminera enfin la valeur de la limite. Pour ce dernier point, on pourra localiser ladite limite par passage d'inégalités à la limite.
5. Proposer un programme Maple prenant en entrée u_0 et n, et retournant u_n.
6. Reprendre l'étude lorsque $u_0 = 0$, puis $u_0 = -1$, puis $u_0 = 2$, $u_0 = 3$, $u_0 = 4$, et enfin $u_0 = 5$.

Pour information, voici les points sur lesquels je dois systématiquement grogner en rendant les copies, quand ce type de problème est posé en DS : pour chacun des points, signalez si vous avez le sentiment d'avoir traité correctement cet aspect et/ou compris le problème signalé (Oui / Non / Mouais) :

1. Faire un dessin avec f et les premiers u_n.

   O - N - M

2. Montrer que f est croissante.

   O - N - M

3. Montrer qu'un intervalle est stable.

   O - N - M

4. Montrer que les u_n appartiennent à un intervalle.

   O - N - M

5. Montrer que (u_n) converge.

   O - N - M

6. Montrer que $l = f(l)$.

   O - N - M

7. Montrer que $l \in I$ (localisation de la limite).

   O - N - M

8. Montrer que $l = \pi$ (et pas 2π ou 300π).

   O - N - M

9. Distinction entre $<$ et $\leq$.

   O - N - M

   On termine par trois âneries : merci de signaler si vous comprenez en quoi ce sont des bétises

10. « f est bijective, donc il existe un unique x tel que $f(x) = x$. »

    O - N - M

11. « (u_n) est croissante sur I. »

    O - N - M

12. « (u_n) converge donc $u_{n+1} = u_n$ à partir d'un certain rang. »

    O - N - M

Merci de joindre cette feuille à votre copie.