À rendre le 23 Novembre 2009

1 Une courbe à tracer

Étudier puis représenter la courbe d'équation polaire

$$\rho = \frac{\sin^2\theta}{1+\sqrt{2}\cos\theta}.$$

2 Une propriété de la cardioïde

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Le repère tournant est noté $\mathcal{R}_T = (O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

1. Représenter la cardioïde, d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.
2. Exprimer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ dans la base tournante $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$; faire apparaître une expression de la forme $\begin{pmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\end{pmatrix}$. Calculer l'angle entre $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{V}$. Exprimer enfin en fonction de θ l'angle orienté entre $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{V}$.
3. Montrer que si on se fixe un angle $\varphi \in]0, \pi[$, il existe trois points de la cardioïde en lesquels la tangente fait un angle φ avec l'horizontale. Qu'en est-il pour $\varphi = 0$?

3 L'orthoptique de l'hyperbole

Par une méthode similaire à celle mise en oeuvre dans le cas de l'ellipse, déterminer le lieu des points par lesquels on peut mener deux tangentes orthogonales à une hyperbole donnée.

On admettra qu'une droite est tangente à une hyperbole si et seulement si l'intersection des deux est réduite à un point, et que la droite n'est pas parallèle à l'une des deux asymptotes de l'hyperbole.