

## 1 De la bonne vieille géométrie

1. (a) Faisons un petit dessin<sup>1</sup> :

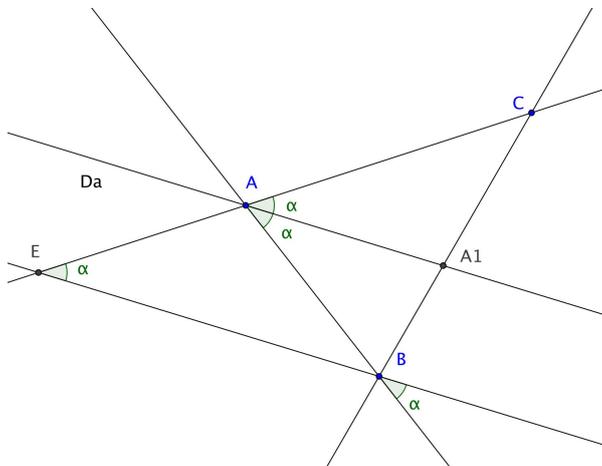


FIG. 1 – Le secret est, comme toujours, la chasse aux angles

On a d'une part dans le triangle  $(ABE)$  :  $(AEB) = \pi - (BAE) - (ABE)$  (on parle d'angles non orientés), et d'autre part  $\pi = (BAE) + (BAC) = (BAE) + 2(BAA_1)$  et puisque  $(BAA_1) = (ABE)$  :

$$(AEB) = \pi - (BAE) - (ABE) = 2(BAA_1) - (ABE) = 2(ABE) - (ABE) = (ABE),$$

ce qui prouve que  $(ABE)$  est isocèle en  $A$ .

- (b) D'après le théorème de Thalès, puis grâce à ce qui précède, on a :

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AC}.$$

2. L'aire de  $(ABC)$  vaut  $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \left| [\vec{CA}, \vec{CB}] \right|$  alors que celle de  $(A_1B_1C)$  vaut  $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} \left| [\vec{CA_1}, \vec{CB_1}] \right|$ .

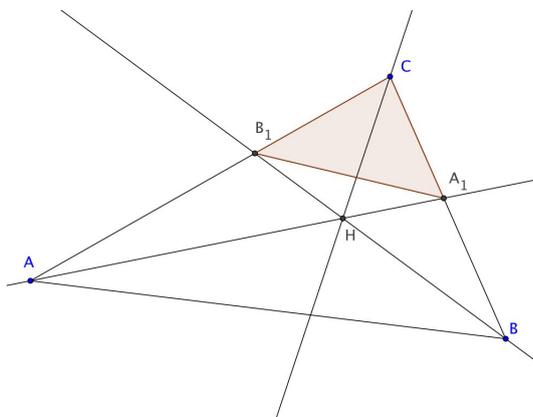


FIG. 2 – Joli, non ?

<sup>1</sup>La réponse à votre question est : geogebra, export en .svg, conversion en .jpg, et enfin includegraphics

Le rapport entre les deux aires vaut donc :

$$\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = \frac{CA}{CB_1} \cdot \frac{CB}{CA_1} = \frac{CB_1 + B_1A}{CB_1} \cdot \frac{CA_1 + A_1B}{CA_1} = \left(1 + \frac{B_1A}{B_1C}\right) \left(1 + \frac{A_1B}{A_1C}\right),$$

soit d'après de qui précède :

$$\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = \left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{(a+c)(b+c)}{ab}.$$

Dans le cas d'un triangle  $(ABC)$  équilatéral, le rapport des surfaces vaut clairement 4, ce qui coïncide avec le résultat qu'on vient d'établir.

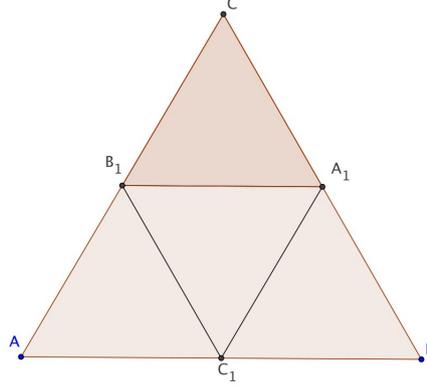


FIG. 3 – Cas d'un triangle équilatéral

## 2 Des points de rebroussement

1. Pour que  $M_t$  soit de rebroussement, il est déjà nécessaire d'avoir  $\vec{V}_t = \vec{0}$ , soit ici  $\begin{cases} t^4 = 3a \\ t^4 = b \end{cases}$

*Il est donc nécessaire d'avoir  $3a = b > 0$ .*

Supposons maintenant que l'on ait  $3a = b > 0$ . La courbe possède deux points stationnaires aux paramètres  $t = \pm t_0$ , avec  $t_0 = b^{1/4}$ . Puisque  $M_{-t}$  se déduit de  $M_t$  via une réflexion par rapport à l'axe de  $y$ , il suffit d'étudier  $M_t$  au voisinage de  $M_{t_0}$ . Le théorème de Taylor-Young<sup>2</sup> donne :

$$M_{t_0+u} = M_{t_0} + bu^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{t_0^5} \\ 3 \\ 1 + \frac{t_0^4}{t_0^4} \end{pmatrix} + \frac{2b}{3}u^3 \begin{pmatrix} -\frac{5}{t_0^6} \\ \frac{6}{t_0^6} \\ -\frac{t_0^4}{t_0^5} \end{pmatrix} + o(u^3).$$

Notons  $\vec{I}$  et  $\vec{J}$  les vecteurs auxquels on pense. Pour établir leur éventuelle (non-)colinéarité, on calcule leur produit mixte :

$$[\vec{I}, \vec{J}] = \frac{1}{t_0^{10}} (-12 + 5t_0^4 + 15) = \frac{3 + 5t_0^4}{t_0^{10}} > 0.$$

Ainsi,  $\vec{I}$  et  $\vec{J}$  ne sont pas colinéaires, et la courbe paramétrée présente en  $M_{t_0}$  (donc aussi en  $M_{-t_0}$ ) un point d'inflexion de première espèce, comme on pouvait raisonnablement l'espérer au vu du cas  $b = 1$  :

<sup>2</sup>utilisé à titre exceptionnel : ici, un DL direct est plutôt pénible, alors que les dérivées sont simples à calculer

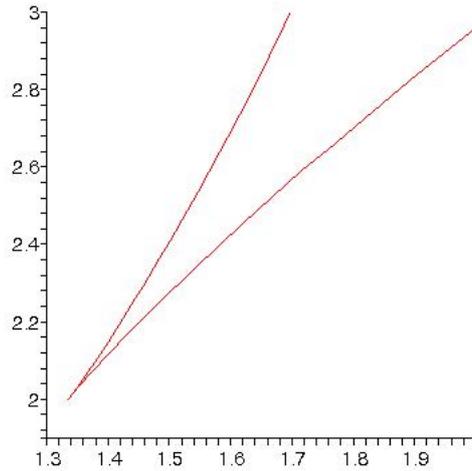


FIG. 4 – Aspect au voisinage de  $t_0$  ( $b = 1$ )

2. On va s'intéresser au lieu des  $R = M_{t_0}$  lorsque  $b$  décrit  $\mathbb{R}_+$ , avec  $a = \frac{b}{3}$  (on rappelle que le second point d'inflexion  $M_{-t_0}$  est le symétrique de  $M_{t_0}$  par rapport à l'axe  $(Oy)$ ). Attention, ici c'est  $b$  le paramètre, et on se souvient que  $t_0^4 = b$  :

$$\begin{cases} x_R = x(t_0) = \frac{t_0^4 + a}{t_0^3} = \frac{\frac{4}{3}b}{b^{3/4}} = \frac{4}{3}b^{1/4} \\ y_R = y(t_0) = \frac{t_0^4 + b}{t_0^2} = \frac{2b}{b^{1/2}} = 2\sqrt{b} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout  $b > 0$ , on a la relation  $y_R = \frac{9}{8}x_R^2$ . Les points  $R$  sont donc sur la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = \frac{9}{8}x^2$ .

Réciproquement, si  $M(x, y)$  appartient à cette parabole *privée de l'origine*, alors

- si  $x > 0$ , en prenant  $b = \left(\frac{3}{4}x\right)^4$ , on aura  $M = R$ ;
- si  $x < 0$ , alors en prenant  $b = \left(\frac{3}{4}x\right)^4$ , le point  $M$  correspondra au point de rebroussement  $R'$ , symétrique de  $R$  par rapport à  $(Oy)$ .

Ainsi :

*Le lieu décrit par les points de rebroussements est la parabole  $\mathcal{P}$  privée de l'origine.*

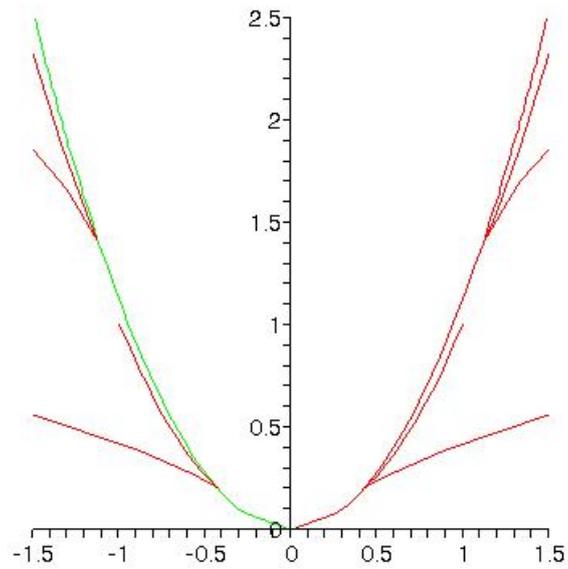


FIG. 5 – Le lieu, ainsi que les rebroussements pour  $b = 0.5$  et  $b = 0.01$ .

### 3 Deux courbes paramétrées « en polaire »

1. On se ramène de façon usuelle à l'intervalle  $[0, \pi/2]$  :

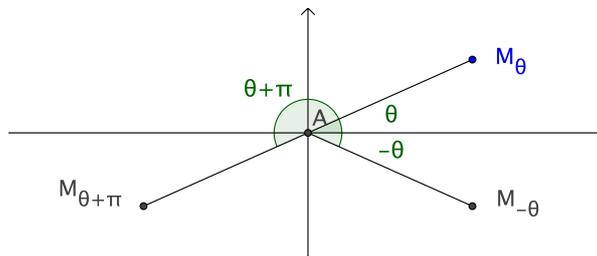


FIG. 6 – Les symétries « habituelles »

Le signe de  $\rho(\theta)$  n'est pas trop difficile à déterminer :

$\theta$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\rho(\theta)$	$3a$	$+$	$0$
		$-$	$-a$

Et l'étude est... finie !

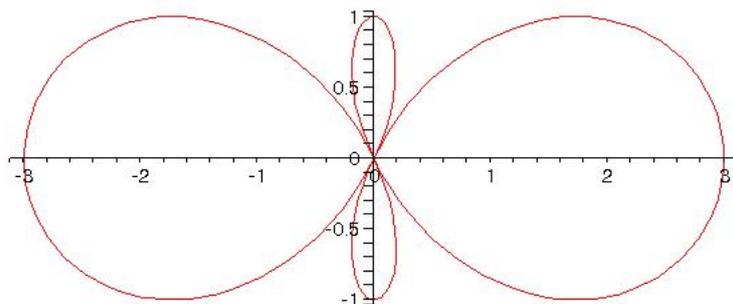


FIG. 7 -  $\rho = \frac{2 \sin(2\theta) - 1}{\sin \theta}$  (avec  $a = 1$ )

2. Ici,  $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$ , donc  $M_{\theta+\pi} = M_\theta$  !

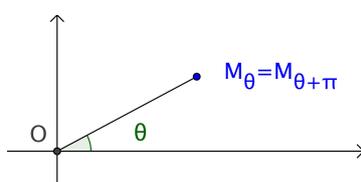


FIG. 8 - Lorsque  $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$ ...

Sur  $]0, \pi[$ , le signe de  $\rho$  est à nouveau très simple à étudier :

$\theta$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\pi$			
$\rho(\theta)$	$-\infty$	-	0	+	0	-	$-\infty$

Au voisinage de  $\theta = \frac{\pi}{12}$  et  $\theta = \frac{5\pi}{12}$ , la courbe passe par l'origine

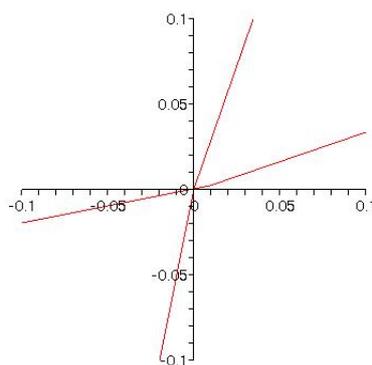


FIG. 9 - Zoom au voisinage de l'origine

Au voisinage de  $0^+$ , on a  $x(\theta) = \rho(\theta) \cos(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0^+} -\infty$  et  $y(\theta) = \rho(\theta) \sin(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0^+} -1^+$ , d'où une asymptote horizontale d'équation  $y = -1$ . Même chose en  $\pi^-$ .

On peut passer au dessin :

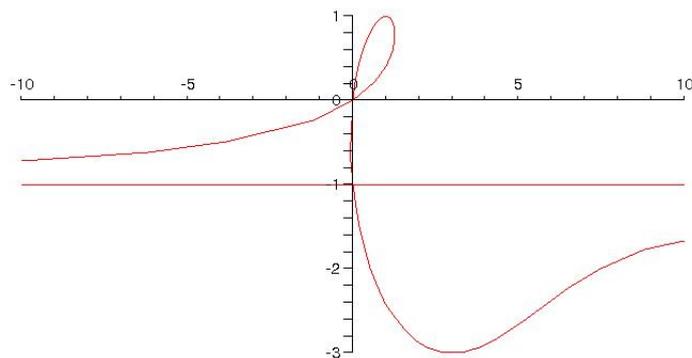


FIG. 10 -  $\rho = \frac{2 \sin(2\theta) - 1}{\sin \theta}$

## 4 Un lieu pas trop compliqué

1. Demandons à notre nouvel ami :

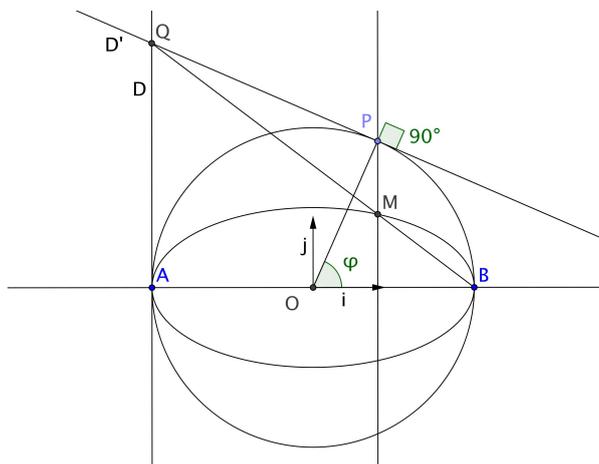


FIG. 11 - Geogebra dispose également d'une fonction « lieu »

2. On note  $O$  le milieu de  $[AB]$ ,  $R = OB$ , et on travaille dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , avec  $\vec{i} = \frac{\vec{OB}}{OB}$  et  $\vec{j}$  orthogonal à  $\vec{i}$  et de norme 1. Dans ce repère, on a  $P(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$ .  $D'$  a pour équation normale  $x \cos \varphi + y \sin \varphi = R$ , donc son intersection avec  $D : x = -R$  est  $Q \left( -R, R \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right)$  ( $P \notin \{A, B\}$ , donc  $\sin \varphi \neq 0$ ). On a alors  $\vec{QB} \left( -\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}, R \right)$ , si bien qu'un vecteur normal à  $(BQ)$  est  $\left( \frac{1 + \cos \varphi}{2 \sin \varphi} \right)$ , d'où l'équation normale de  $(PQ) : (1 + \cos \varphi)x + y \sin \varphi = R(1 + \cos \varphi)$ , et pour le point  $M$  qui nous intéresse,  $x = R \cos \varphi$  donc  $y = R \frac{(1 + \cos \varphi)(1 - \cos \varphi)}{2 \sin \varphi} = \frac{R}{2} \sin \varphi$ .  $M$  décrit donc l'ellipse de centre  $O$ , d'axe focal  $(AB)$ , et de demi-axes  $R$  et  $\frac{R}{2}$ .