Pour maintenir la forme

À rendre le lundi 16 Novembre 2009

1 De la bonne vieille géométrie

Soit (ABC) un « vrai » triangle.

1. On note D_A la bissectrice intérieure issue de A, et A_1 le point d'intersection entre D_A et (BC). On va montrer :
$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC}.$$
Notons pour cela E le point d'intersection entre (AC) et la parallèle à D_A passant par B.
   (a) Justifier le fait que (ABE) est isocèle en A.
   (b) Conclure !
2. On note de même D_B et D_C les bissectrices intérieures issues de B et C, ainsi que B_1 et C_1 leurs intersections respectives avec (AC) et (AB).
Montrer que le rapport entre l'aire de (ABC) et celle de (A_1B_1C) s'exprime simplement à l'aide de $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.
Vérifier la formule précédente dans le cas d'un triangle (ABC) équilatéral.

2 Des points de rebroussements

1. Donner des conditions sur les réels a et b pour que l'arc paramétré
$$\begin{cases} x(t) = t + \dfrac{a}{t^3} \\ y(t) = t^2 + \dfrac{b}{t^2} \end{cases}$$
possède des points de rebroussements. Préciser alors leur nature.
2. Donner le lieu de ces points de rebroussement lorsque a et b varient (en respectant la condition établie plus haut !)

3 Deux courbes paramétrées « en polaire »

Étudier puis représenter les courbes d'équations polaires :

1. $\rho = a\,(1 + 2\cos(2\theta))$ (avec a un réel strictement positif fixé) ;
2. $\rho = \dfrac{2\sin(2\theta) - 1}{\sin\theta}$.

4 Un lieu pas trop compliqué

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, avec A et B deux points distincts du plan. Pour $P \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$, on note Q l'intersection entre la tangente D à $\mathcal{C}$ en A et la tangente D' à $\mathcal{C}$ en P. On définit ensuite M l'intersection entre (BQ) et la parallèle à D passant par P.

1. Faire un joli dessin.
2. Déterminer l'ensemble décrit par M lorsque P décrit $\mathcal{C} \setminus \{A, B\}$.