À rendre le 5 Novembre 2009

1 Géométrie de grand-papa

On travaille ici dans le plan, avec un vrai triangle $\mathcal{T} = (ABC)$.

1. En travaillant dans un repère adéquat, montrer que les trois médianes de $\mathcal{T}$ sont concourantes.
2. Prouver le résultat précédent en considérant G l'isobarycentre des trois sommets, et en prouvant qu'il est barycentre de $\{(A, 1), (A', 2)\}$ (avec A' le centre de $[BC]$).
3. En travaillant dans un repère adéquat, montrer que les trois hauteurs de $\mathcal{T}$ sont concourantes.
4. On note D_A, D_B et D_C les parallèles à respectivement (BC), (AC) et (AB) passant respectivement par A, B et C.

   On note E le point d'intersection entre D_A et D_B. Montrer : $AE = BC$. En déduire que les trois hauteurs du triangle (ABC) sont les trois médiatrices d'un autre triangle, et conclure !

2 Kapla

On souhaite empiler des pièces de bois (*très*) régulières, en les décalant à chaque fois selon le même axe, en maximisant chaque décalage pour avoir la projection verticale de la pièce supérieure ne touchant pas la pièce inférieure (cf l'expérience faite en cours !).

La rêgle physique à respecter est que lorsqu'on place un bloc sur une nouvelle pièce, le centre de gravité du bloc doit se projeter verticalement sur la pièce inférieure. En pratique, pour maximiser les décalages, on fait en sorte que ce projeté soit sur la tranche.

On note δ_n le décalage maximal que l'on peut obtenir entre les pièces n et $n+1$. Chaque pièce est supposée de longueur égale à 1.

1. Montrer : $\delta_1 = \dfrac{1}{2}\cdot$
2. Calculer la position du centre de gravité du bloc constitué des deux premières places, en ayant pris un décalage 1/2 entre celles-ci. En déduire la valeur de δ_2.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\delta_n = \dfrac{1}{2n}\cdot$
4. À partir de combien de pièces peut-on obtenir la pièce supérieure en surplomb de la pièce inférieure ?
5. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1).$$
   On pourra comparer la somme à une intégrale, en commençant par s'intéresser à $\dfrac{1}{k}\cdot$ *Dessin obligatoire !*

6. Montrer que pour tout $D > 0$, on peut construire un assemblage de pièces tel que le décalage entre les pièces supérieure et inférieure dépasse D. De combien de pièces a-t-on besoin lorsque $D = 1$? et $D = 2$?

3 Une courbe paramétrée

On s'intéresse ici à la courbe Γ d'équation paramétrée

$$\begin{cases} x(t) & = & \dfrac{1+t+t^2}{1+t^2} \\ y(t) & = & \dfrac{t(1+t+t^2)}{1+t^2} \end{cases}$$

1. Étudier x et y ; représenter Γ. Localiser les zones dans lesquelles on peut raisonnablement penser qu'il y a des points d'inflexions.
2. On cherche ici une CNS simple portant sur α, β et γ pour que M_α, M_β et M_γ soient alignés.

   Cette question est difficile. Vous apprendrez beaucoup en la travaillant, mais si vous n'y arrivez pas, passez à la suite en admettant les résultats donnés dans l'énoncé.

   (a) On suppose ici que la droite d'équation $y = px + q$ intersecte Γ en trois points M_α, M_β et M_γ (avec α, β et γ distincts deux à deux). Montrer que α, β et γ sont alors racines d'un polynôme du troisième degré, puis qu'ils vérifient :

   $$\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma - 1.$$

   (b) Réciproquement, on suppose ici : $\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma - 1$. Montrer qu'on peut trouver p et q tels que Γ intersecte la droite d'équation $y = px + q$ en M_α, M_β et M_γ.

   (c) Montrer qu'il n'existe pas de droite « verticale » (parallèle à l'axe des y) intersectant Γ en trois points.

   (d) Conclure !
3. Montrer que Γ possède trois points d'inflexion, correspondant aux points de paramètre t_1, t_2 et t_3 les racines (qu'on ne cherchera pas à calculer) de $t^3 - 3t - 1 = 0$.
4. Montrer que les trois points d'inflexion de Γ sont alignés.