1 Un calcul d'asymptote

À vue, $f(x)$ est équivalent à x lorsque x tend vers $+\infty$. On va donc chercher un développement de la forme $f(x) = x + q + \frac{r}{x} + o(1/x)$. Pour cela, on va développer chaque membre du produit avec deux termes au delà de l'équivalent :

$$(x+1)^5 = x^5\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{10}{x^2} + o(1/x^2)\right),$$

$$\mathrm{e}^{2/x} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o(1/x^2),$$

et enfin :

$$(x-1)^{-4} = x^{-4}\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{10}{x^2} + o(1/x^2)\right).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{10}{x^2} + o(1/x^2)\right)\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o(1/x^2)\right)\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{10}{x^2} + o(1/x^2)\right)\\
&= x\left(1 + \underbrace{(2+5)}_{7}\frac{1}{x} + \underbrace{(2+10+10)}_{22}\frac{1}{x^2} + o(1/x^2)\right)\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{10}{x^2} + o(1/x^2)\right)\\
&= x\left(1 + \underbrace{(4+7)}_{11}\frac{1}{x} + \underbrace{(10+28+22)}_{60}\frac{1}{x^2} + o(1/x^2)\right)\\
&= x + 11 + \frac{60}{x} + o(1/x).
\end{aligned}$$

Ainsi, Γ possède pour asymptote la droite Δ d'équation $y = x + 11$, en étant situé dessus au voisinage de $+\infty$, puisque

$$f(x) - (x+11) \sim \frac{60}{x} > 0.$$

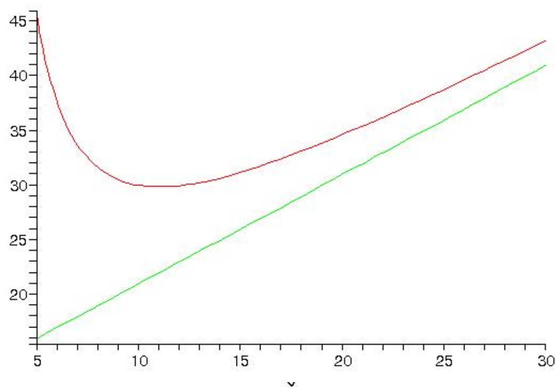

FIG. 1 – Le graphe Γ de f, et son asymptote Δ

2 Solutions bornées sur $\mathbb{R}$ d'une EDL d'odre 1

1. Le cours nous donne directement $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto K\mathrm{e}^{\cos t},\ K \in \mathbb{R}\}$, et si on ouvre les yeux, on peut constater su'on dispose d'une solution « évidente » $t \mapsto 1$ pour l'équation avec second membre (sinon, on applique la variation de la constante). On a ainsi :
$$\mathcal{S}_E = \left\{t \mapsto 1 + K\mathrm{e}^{\cos t}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}.$$
Toutes ces solutions sont bornées : K étant fixé, on a la majoration claire (?) :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left|1 + K\mathrm{e}^{\cos t}\right| \leq 1 + |K|\,\mathrm{e}.$$

2. Une primitive de $t \mapsto -\dfrac{2t}{1+t^2}$ étant $t \mapsto -\ln(1+t^2)$, on a directement :
$$\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto K\mathrm{e}^{\ln(1+t^2)} = K(1+t^2)\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}.$$
On cherche une solution particulière sous la forme $y(t) = K(t)(1+t^2)$. On a alors
$$y' - \frac{2t}{1+t^2}y = K'(t)(1+t^2) + 2tK(t) - 2tK(t) = K'(t)(1+t^2);$$
on souhaite donc avoir $K'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, et pour cela il suffit de prendre $K(t) = \arctan t$, fournissant la solution particulière $t \mapsto (1+t^2)\arctan t$, et donc :
$$\mathcal{S}_E = \left\{t \mapsto (\arctan t + K)(1+t^2)\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}.$$
Fixons $K \in \mathbb{R}$, et montrons que $y(t) = (\arctan t + K)(1+t^2)$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, $\arctan t + K$ tend vers $K + \dfrac{\pi}{2}\cdot$ Ainsi :
– si $K > -\dfrac{\pi}{2}$, alors $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$;
– si $K < -\dfrac{\pi}{2}$, alors $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$;
– si $K = \dfrac{Pi}{2}$, alors on ne peut rien dire en $-\infty$, mais si on tourne la tête, on voit que $y(t) \underset{-\infty\to t}{\longrightarrow} -\infty$.
Dans les trois cas, on peut conclure que y n'est pas bornée.

3. On trouve cette fois (avec les techniques précédentes) :
$$\mathcal{S}_E = \left\{t \mapsto \frac{1}{1+t^2} + K(1+t^2)\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}.$$
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est clairement (?) bornée sur $\mathbb{R}$, alors que $t \mapsto K(1+t^2)$ l'est... si et seulement si $K = 0$. Ainsi, l'équation différentielle proposée possède une unique solution bornée, à savoir $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}\cdot$

4. Cette fois :
$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \mapsto \left(K + \ln(1 + \mathrm{e}^t) \right) \mathrm{e}^{-t} \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}.$$
Fixons $K \in \mathbb{R}$ et notons $y(t) = (K + \ln(1 + \mathrm{e}^t))\, \mathrm{e}^{-t}$.

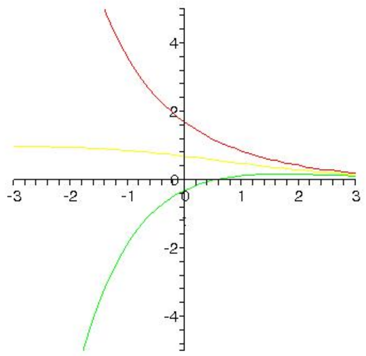

FIG. 2 – Le graphe de y lorsque $K = -1$, $K = 0$ et $K = 1$.

Déjà, $K + \ln(1 + \mathrm{e}^t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} K$, donc $y(t)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $K > 0$ (resp ; $K < 0$) lorsque t tend vers $-\infty$, donc y n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
Supposons maintenant : $K = 0$. On a alors $y(t) = \ln(1 + \mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}$. Cette fois, $y(t) \sim 1$ au voisinage de $-\infty$, alors qu'au voisinage de $+\infty$, on a (mais est-si clair ?) $y(t) \sim t\mathrm{e}^{-t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$. « On en déduit » que y est bornée sur $\mathbb{R}$. Mais est-ce si clair ? On pourrait établir que y est décroissante sur $\mathbb{R}$ (travail non trivial à réaliser pour le prouver) et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t)$ est compris entre ses limites respectives en $+\infty$ et $-\infty$. Sans les arguments de variations, on peut raisonner comme ceci :
Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \leq A$, on a $0 \leq y(t) \leq 2$. De même, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq B$, on a $-1 \leq y(t) \leq 1$. Par ailleurs, sur le segment $[A, B]$, la fonction est continue donc bornée (c'est un theorème que l'on verra dans l'année !). y est donc bornée sur $]-\infty, A]$, $[A, B]$, et $[B, +\infty[$, donc globalement sur $\mathbb{R}$.

5. Supposons que l'équation
$$y' + ay = b \qquad (E)$$
possède deux solutions bornées sur $\mathbb{R}$, disons y_1 et y_2 (avec $y_1 \neq y_2$!). La fonction $y_3 = y_2 - y_1$ est alors une solution non nulle de l'équation homogène. On a alors $\mathcal{S}_H = \{Ky_3, \ K \in \mathbb{R}\}$ puis :
$$\mathcal{S}_E = \{y_1 + Ky_3 \ , \ K \in \mathbb{R}\},$$
et toutes les fonctions $y_1 + Ky_3$ sont bien bornées sur $\mathbb{R}$: cqfd.