1 Un développement asymptotique

1. f est continue, et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 1 + \dfrac{1}{x}$, quantité strictement positive pour tout $x > 0$, donc f est strictement croissante. Les limites de f en 0^+ et $+\infty$ sont par ailleurs évidentes (les différents protagonistes étant d'accords) : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   La continuité, la stricte croissance et les limites nous assurent que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Pour le graphe, on se contente de placer $f(1)$ et de respecter les limites.
2. Fixons $n \in \mathbb{N}$. L'application f étant une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, on est certain que n possède un unique antécédent par f.
3. On a $f\left(\dfrac{n^{1/4}}{2}\right) = \dfrac{n}{16} + o(n) \sim \dfrac{n}{16}$, donc $\dfrac{f\left(\dfrac{n^{1/4}}{2}\right)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{16}$, donc $\dfrac{f\left(\dfrac{n^{1/4}}{2}\right)}{n} \leq 1$ pour n assez grand. On aura alors :
$$f\left(\frac{n^{1/4}}{2}\right) \leq n = f(x_n),$$
   et la *stricte* croissance de f nous assure que $\dfrac{n^{1/4}}{2} \leq x_n$.
   Puisque $\dfrac{n^{1/4}}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on conclut : $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
4. On a $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^4$ et $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $f(x_n) \sim x_n^4$. Mais $f(x_n) = n$, donc $x_n^4 \sim n$, et enfin $x_n \sim n^{1/4}$.
   En cas d'état d'âme sur le dernier point, écrire $\dfrac{x_n}{n^{1/4}} = \left(\dfrac{x_n^4}{n}\right)^{1/4} \cdots$
5. $\dfrac{x_n}{n^{1/4}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, or ce rapport vaut $1 + y_n$ par construction, donc $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
6. On suit l'indication de l'énoncé :
$$\begin{aligned} n = f(x_n) &= n(1+y_n)^4 + 2n^{3/4}(1+y_n)^3 + n^{1/4}(1+y_n) + \ln\left(n^{1/4}(1+y_n)\right) \\ &= n\left(1 + 4y_n + o(y_n)\right) + 2n^{3/4} + o(n^{3/4}) \end{aligned}$$
   donc $-2n^{3/4} \sim -2n^{3/4} + o(n^{3/4}) = n\left(4y_n + o(y_n)\right) \sim 4ny_n$ et ainsi $y_n \sim -\dfrac{1}{2n^{1/4}}$, donc $y_n = -\dfrac{1}{2n^{1/4}} + o(1/n^{1/4})$, puis en reportant dans $x_n = n^{1/4}(1+y_n)$:
$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + o(1).$$
7. On écrit maintenant $x_n = n^{1/4} - \dfrac{1}{2} + \varepsilon_n$, et on réinjecte dans l'équation $f(x_n) = n$ selon le même principe (obtenir un terme équivalent à ε_n égal à un terme équivalent à quelque chose de simple). A la première étape, $f(x)$ avait été évalué simplement au niveau de l'équivalent. Pour prolonger le développement asymptotique de x_n, on avait arraché un terme de plus à $f(x)$. Et pour obtenir un nouveau terme dans le DA de x_n, devinez quoi ?
$$\begin{aligned} n = f(x_n) &= n\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{1/4}}\right)^4 + 2n^{3/4}\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{1/4}}\right)^3 + n^{1/4}(\ldots) + \ln(\ldots) \\ &= n\left(1 - \frac{4}{2n^{1/4}} + 4\frac{\varepsilon_n}{n^{1/4}} + \frac{6}{4n^{1/2}}\right) + 2n^{3/4}\left(1 - \frac{3}{2n^{1/4}} + o(1/n^{1/4})\right) + o(n^{1/2}) \\ &= n + n^{3/4}(-2 + 2 + 4\varepsilon_n) + n^{1/2}(3/2 - 3) + o(n^{1/2}) \end{aligned}$$
   donc $4\varepsilon_n n^{3/4} = \dfrac{3}{2}n^{1/2} + o(n^{1/2}) \sim \dfrac{3}{2}n^{1/2}$, donc $\varepsilon_n \sim \dfrac{3}{8n^{1/4}}$, et on doit pouvoir conclure si on est arrivé jusque là.

2 Deux EDL du premier ordre

1. On a directement $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto K\mathrm{e}^{-3t} \mid K \in \mathbb{R}\}$. On cherche ensuite une solution particulière par variation de la constante : $y_0(t) = K(t)\mathrm{e}^{-3t}$. On a alors $y_0' + 3y_0 = \cdots = K'(t)\mathrm{e}^{-3t}$, donc y_0 est solution de notre équation avec second membre si et seulement si $K'(t) = t\mathrm{e}^{3t}\sin t$. Il suffit pour cela de prendre $K(t) = \displaystyle\int_0^t t\sin t\mathrm{e}^{3t}dt$, c'est-à-dire $K(t) = \mathrm{Im}\,(Z(t))$, avec :

$$\begin{aligned} Z(t) &= \int_0^t t\mathrm{e}^{3t}\mathrm{e}^{it}dt = \left[x\frac{\mathrm{e}^{(3+i)x}}{3+i}\right]_0^t - \frac{1}{3+i}\int_0^t \mathrm{e}^{(3+i)t}dt = \left[x\frac{\mathrm{e}^{(3+i)x}}{3+i} - \frac{\mathrm{e}^{(3+i)x}}{(3+i)^2}\right]_0^t \\ &= t\frac{\mathrm{e}^{(3+i)t}}{3+i} - \frac{\mathrm{e}^{(3+i)t}-1}{(3+i)^2} = \frac{t}{10}(3-i)\mathrm{e}^{(3+i)t} + \frac{1}{100}(8-6i)(1-\mathrm{e}^{(3+i)t}), \end{aligned}$$

soit encore $K(t) = \mathrm{e}^{3t}\left(\frac{t}{10}(3\sin t - \cos t) + \frac{1}{50}(-3 - 4\sin t + 3\cos t)\right)$, puis $y_0(t) = \mathrm{e}^{-3t}K(t)$, et enfin :

$$\mathcal{S}_E = \left\{t \mapsto \frac{t}{10}(3\sin t - \cos t) + \frac{1}{50}(-4\sin t + 3\cos t) + K\mathrm{e}^{-3t} \;\middle|\; K \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Immédiatement, $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto K\mathrm{e}^{t} \mid K \in \mathbb{R}\}$. On cherche ensuite une solution particulière par variation de la constante : $y_0(t) = K(t)\mathrm{e}^{t}$. On a alors $y_0' - y_0 = \cdots = K'(t)\mathrm{e}^{t}$, donc y_0 est solution de notre équation avec second membre si et seulement si $K'(t) = (t^2 - t\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t} = t^2\mathrm{e}^{-t} - t$, ce qui sera aquis en prenant :

$$\begin{aligned} K(t) &= \int_0^t (u^2\mathrm{e}^{-u} - u)du = -\frac{t^2}{2} + \left(\left[-u^2\mathrm{e}^{-u}\right]_0^t + 2\int_0^t \mathrm{e}^{-u}du\right) \\ &= -\frac{t^2}{2} - t^2\mathrm{e}^{-t} + 2\left(\left[-u\mathrm{e}^{-u}\right]_0^t + \int_0^t \mathrm{e}^{-u}du\right) \\ &= -\frac{t^2}{2} - t^2\mathrm{e}^{-t} - 2t\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-t} + 2. \end{aligned}$$

Pour information... voici comment faire un calcul formel de primitive, avec la notation à la physicienne (sans les bornes). Regarder en particulier ce qui se passe au moment de l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} K(t) &= \int (t^2\mathrm{e}^{-t} - t)dt = -\frac{t^2}{2} + \left(-t^2\mathrm{e}^{-t} + 2\int t\mathrm{e}^{-t}dt\right) \\ &= -\frac{t^2}{2} - t^2\mathrm{e}^{-t} + 2\left(-t\mathrm{e}^{-t} + \int \mathrm{e}^{-t}dt\right) \\ &= -\frac{t^2}{2} - t^2\mathrm{e}^{-t} - 2t\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

Ces calculent fournissent la solution particulière $y_0(t) = -\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t - t^2 - 2t - 2$, et donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{t \mapsto -\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t - t^2 - 2t - 2 + K\mathrm{e}^t \;\middle|\; K \in \mathbb{R}\right\}.$$

La condition initiale $y(0) = 1$ est équivalente à $-2 + K = 1$, c'est-à-dire $K = 3$, et ainsi le problème de Cauchy possède une unique solution, à savoir :

$$y_1 : x \mapsto -\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t - t^2 - 2t - 2 + 3\mathrm{e}^t.$$

3 Deux EDL du deuxième ordre

1. On a bien entendu[1] supposé $\omega_0 \neq 0$ (sans quoi, le problème change de nature... et ses solutions aussi !). L'équation caractéritique $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ possède donc deux racines complexes distinctes conjuguées $\pm i\omega_0$, de sorte que :

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{C}} = \left\{ t \mapsto K_1 \mathrm{e}^{i\omega_0 t} + K_2 \mathrm{e}^{-i\omega_0 t} \;\middle|\; K_1, K_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

et

$$\mathcal{S}_{H,\mathbb{R}} = \left\{ t \mapsto C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin \omega_0 t \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche maintenant une solution particulière réelle.

- Supposons d'abord $\omega_0^2 \neq \omega_1^2$. On va chercher uu solution particulière sous la forme $y_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi) + B \sin(\omega_1 t + \varphi)$. Une telle fonction vérifie

$$y_1''(t) + \omega_0^2 y_1(t) = A(\omega_0^2 - \omega_1^2)\cos(\omega_1 t + \varphi) + B(\omega_0^2 - \omega_1^2)\sin(\omega_1 t + \varphi),$$

  et on va donc choisir $B = 0$ et $A = \dfrac{K}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$, de sorte que :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \mapsto \frac{K}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos(\omega_1 t + \varphi) + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin \omega_0 t \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Supposons maintenant $\omega_0^2 = \omega_1^2 \neq 0$. On va alors chercher une solution particulière sous la forme $y_1(t) = At\cos(\omega_1 t + \varphi) + Bt \sin(\omega_1 t + \varphi)$. Une telle fonction vérifie[2]

$$y_1''(t) + \omega_0^2 y_1(t) = 2B\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) - 2A\omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

  et on va donc choisir $A = 0$ et $B = \dfrac{K}{2\omega_1}$, de sorte que :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \mapsto \frac{K}{2\omega_1} \cos(\omega_0 t + \varphi) + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin \omega_0 t \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Enfin, si $\omega_0 = \omega_1 = 0$, notre équation est : $y'' = K \cos \varphi$, et donc :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \mapsto \frac{K \cos \varphi}{2} t^2 + C_1 t + C_2 \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, soit encore $(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$, et ainsi :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{2t} + C_2 \mathrm{e}^{3t} \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y_0(t) = (at^3 + bt^2 + ct)\mathrm{e}^{2t}$. Il suffit alors (après calculs calmes) de prendre $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = -1$ et $c = -2$, et ainsi :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \mapsto \left(C_1 - 2t - t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \mathrm{e}^{2t} + C_2 \mathrm{e}^3 t \;\middle|\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les conditions initiales reviennent ensuite à trouver C_1 et C_2 tels que $C_1 + C_2 = 1$ et $-2 + 2C_1 + 3C_2 = 0$, soit encore $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$, et notre problème de Cauchy possède donc pour unique solution l'application

$$t \mapsto \left(1 - 2t - t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \mathrm{e}^{2t}$$

[1] oui, bon, je n'avais pas tapé le corrigé au moment de donner le DM ; mea culpa.
[2] sortir un crayon !

4 Un changement de variable

1. Lorsque x décrit $\mathbb{R}$, e^x décrit $\mathbb{R}_+^*$ (au sens : prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}_+^*$). Chaque $y(t)$ est donc de la forme $z(\textit{quelque chose})$, ce qui permet de reconstituer y à l'aide de z (plus précisément, $y(t) = z(\ln t)$).
2. Sans problème, $z'(x) = \mathrm{e}^x y'(\mathrm{e}^x)$, puis $z''(x) = \mathrm{e}^x y'(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^{2x} y''(\mathrm{e}^x)$.
3. Lorsque x décrit $\mathbb{R}$, e^x décrit $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\forall t > 0,\ t^2 y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = t \ln t \iff \forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{2x} y''(\mathrm{e}^x) + 3\mathrm{e}^x y'(\mathrm{e}^x) + y(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x x.$$

   y est donc solution de (E) si et seulement si z vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad z''(x) + 2z'(x) + z(x) = x\mathrm{e}^x \tag{E_1}$$

4. Avec les méthodes standards :

$$\mathcal{S}_{E_1} = \left\{ x \mapsto (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{x-1}{4}\mathrm{e}^x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. En vertu de ce qui précède :

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S}_E &\iff z \in \mathcal{S}_{E_1} \\ &\iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R};\ \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-x} + \frac{x-1}{4}\mathrm{e}^x \\ &\iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R};\ \forall t > 0, y(t) = z(\ln t) = \frac{C_1 + C_2 \ln t}{t} + \frac{t \ln t - t}{4} \end{aligned}$$

   Et ainsi :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \mapsto \frac{C_1 + C_2 \ln t}{t} + \frac{t \ln t - t}{4} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$