843 - 2009/2010 **DM 2**

À rendre le 28 Septembre 2009

1 Un développement asymptotique

Dans ce problème, f désigne l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x > 0, \qquad f(x) = x^4 + 2x^3 + x + \ln x.$$

On va s'intéresser, pour $n \in \mathbb{N}$, à l'équation $f(x) = n$. Plus précisément, à l'unique solution x_n de cette équation. On en donnera un équivalent... et un peu mieux.

1. Etudier rapidement f ; montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, et représenter son graphe.
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x > 0$ tel que $f(x) = n$.
   Dans toute la suite, x_n désignera ce réel (il dépend bien entendu de n).
3. Montrer que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (on pourra montrer que pour n assez grand, on a $x_n \geq \dfrac{n^{1/4}}{2}$).
4. Montrer que $x_n \sim n^{1/4}$.
5. On note maintenant $x_n = n^{1/4}(1 + y_n)$. Que dire de y_n ?
6. En injectant l'expression précédente dans l'équation $f(x_n) = n$, montrer : $x_n = n^{1/4} - \dfrac{1}{2} + o(1)$.
7. (plus difficile) Montrer :
$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8n^{1/4}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right).$$

2 Deux EDL du premier ordre

1. Résoudre l'EDL $y' + 3y = t \sin t$.
2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' - y = t^2 - t\mathrm{e}^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$

3 Deux EDL du deuxième ordre

1. Soient $\omega_0, \omega_1, K, \varphi \in \mathbb{R}$. Résoudre (en distinguant le cas $\omega_0 = \omega 1$) :
$$y'' + \omega_0^2 y = K \cos(\omega_1 t + \varphi).$$
2. Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = t^2\mathrm{e}^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

4 Un changement de variable

On s'intéresse ici à l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$t^2 y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = t \ln t \qquad (E)$$

Pour la résoudre, on va faire un changement de variable. On dit parfois qu'*on pose $t = e^x$*, ce qui signifie qu'on va s'intéresser à $y(\mathrm{e}^x)$. On note donc, pour $x \in \mathbb{R}$: $z(x) = y(\mathrm{e}^x)$.

1. Expliquer en quoi la connaissance de la fonction z sur $\mathbb{R}$ permet de connaître la fonction y sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On va ainsi transformer le "problème en y" en un "problème en z", puisque chacune de ces fonctions peut se retrouver à l'aide de l'autre.
2. Calculer $z'(x)$ et $z''(x)$ en fonction de x, y et de ses dérivées.
3. Montrer soigneusement que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E_1) simple.
4. Résoudre (E_1).
5. Résoudre (E).