1 Récurrons

1. – On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ ».
   – Pour $n = 0$, il s'agit de prouver que $0 = 1 - 1$, ce qui n'est guère un problème.
   – Supposons $\mathcal{P}(n)$ établie. On a alors :
   $$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{n+2}{(n+2)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!},$$
   ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.
   – Le principe de récurrence permet de conclure : $\mathcal{P}(n)$ est bien vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   En fait, en notant la très subtile relation $k = (k+1) - 1$, on constate :
   $$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!},$$
   donc la somme est « télescopique » :
   $$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} = \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}\right) + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right),$$
   et les termes s'éliminent deux-à-deux... à l'exception du premier et du dernier, prouvant ainsi directement la relation souhaitée.
2. Sur le triangle de Pascal (que je n'ai pas envie de représenter ici !), l'interprétation est claire : si on ajoute les éléments d'une colonne depuis $\binom{p}{p}$ jusqu'à $\binom{p}{n}$, on trouve « le voisin en bas à droite » de $\binom{p}{n}$. Cette interprétation nous donne d'ailleurs la façon de le prouver : si ceci est vrai à un rang n fixé, alors on descendant une ligne plus bas, la somme sur la colonne est la somme précédente plus $\binom{n+1}{p}$, donc $\binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p+1}$, et si on a le triangle de Pascal sous les yeux, une petite lumière s'allume... On peut maintenant rédiger :
   – On FIXE $p \in \mathbb{N}$, et on définit, pour $n \geq p$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ ».
   – Pour l'initialisation, il s'agit de montrer $\mathcal{P}(p)$, soit encore : $1 = 1$, ce qui doit être vrai, n'est-il pas ?
   – Supposons $\mathcal{P}(n)$ établie pour un certain $n \geq p$. On a alors comme vu plus haut :
   $$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1},$$
   ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.
   – Le principe de récurrence permet de conclure quant à la validité de $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geq p$.
3. Au vu de la définition de F_n, on a besoin d'une information sur F_8 et F_9 pour pouvoir dire quelque chose de F_{10}. On va donc faire une récurrence double :
   – Sans fantaisie, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $F_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$ ».
   – Pour $n = 0$ (resp. $n = 1$), il s'agit de montrer $0 \leq 1$ (resp. $1 \leq \frac{7}{4}$), ce qui ne pose guère de problème. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.
   – Supposons la proposition vérifiée aux rang $n-1$ et n, avec n un entier strictement positif fixé. On a alors :
   $$F_{n+1} = F_n + F_{n+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{7}{4}\right) = \frac{11}{4}\left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}.$$

Mais $\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} > \frac{11}{4}$ (comment le prouver sans calculatrice, au fait ?), et donc :

$$F_{n+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^2 \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1},$$

ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$

– Le principe de récurrence permet de conclure.

2 Résolvons

1. Pivotons :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ -2x + y + z = 2 \\ x + 3y - 2z = 3 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 5y - 5z = 4 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 5L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 5y - 5z = 4 \\ 10z = 6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 3z + 1 = 0 \\ y = \frac{1}{5}(5z + 4) = \frac{7}{5} \\ z = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Et ainsi, on trouve une unique solution :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(0, \frac{7}{5}, \frac{3}{5}\right) \right\}.$$

2. On pivote sans génie :

$$\begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ 2x + 3y + z + t = 3 \\ 3x + 5y + 3z + 3t = 5 \\ 4x + 5y - z - t = 7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ y + 3z + 3t = 1 \\ 2y + 6z + 6t = 2 \\ y + 3z + 3t = 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y - z - t = 2 \\ y + 3z + 3t = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Ici, la dernière équation nous assure : $\mathcal{S} = \emptyset$.

3. Pour pouvoir pivoter, on change les deux premières lignes ; on obtient alors le système équivalent :

$$\begin{cases} -2x + (\lambda - 1)y - 4z = \lambda - 5 \\ (3 - \lambda)y - (2 + \lambda)z = 5 - \lambda \\ 3(\lambda - 3)y + 2(2 + \lambda)z = -13 + 3\lambda \end{cases}$$ On n'est pas certain que $3 - \lambda$ soit un pivot,

mais l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ conduit au système équivalent :

$$\begin{cases} -2x + (\lambda - 1)y - 4z = \lambda - 5 \\ (3 - \lambda)y - (2 + \lambda)z = 5 - \lambda \\ (2 + \lambda)z = -2 \end{cases}$$

On discute alors :

– Si $\lambda = -2$, la dernière équation $0 = -2$ nous assure qu'il n'y a pas de solution.

– Si $\lambda = 3$, L_2 et L_3 sont équivalentes et on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \quad (-2y + 4z - 2) = y + \frac{9}{5} \\ z = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

d'où l'ensemble infini de solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(y + \frac{9}{5}, y, -\frac{2}{5} \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

– Sinon, on a un brave système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, qui se résout sans problème, pour trouver une unique solution :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(2\frac{\lambda+4}{2+\lambda}, 1, -\frac{2}{2+\lambda} \right) \right\}$$

3 Trigonométrons

1. On calcule $\varphi(x)$ en la voyant comme la partie réelle d'une somme d'une suite géométrique de raison e^{ikx} :

$$\varphi(x) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2ix} + \mathrm{e}^{3ix} + \cdots + \mathrm{e}^{6ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2ix}\left(1 + \mathrm{e}^{ix} + \cdots + \mathrm{e}^{4ix}\right)\right).$$

Si $\mathrm{e}^{ix} = 1$ (c'est-à-dire $x = 0\ [2\pi]$), alors $\varphi(x) = 5$. Sinon :

$$\varphi(x) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2ix}\frac{1-\mathrm{e}^{5ix}}{1-\mathrm{e}^{ix}}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2ix}\frac{\mathrm{e}^{5ix/2}(-2i\sin\frac{5x}{2})}{\mathrm{e}^{ix/2}(-2i\sin\frac{x}{2})}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{4ix}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right) = \frac{\cos(4x)\sin\frac{5x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Il reste à faire un tableau de signe de ce produit. Notons déjà que ce tableau ne prend pas en compte la valeur factorisée précédente pour $x = 0$ et pour $x = 2\pi$. Pour les autres valeurs de x, chacun des trois termes s'annule un certain nombre de fois, et change de signe en ces points s'annulation (si on a bien compris le fonctionnement des fonction cos et sin...). Plus précisément, lorsque x décrit $]0, 2\pi[$:

- $4x$ décrit $]0, 8\pi[$, donc $\cos(4x)$ s'annule en changeant de signe lorsque $4x$ est de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in [\![0, 7]\!]$ (soit donc huit valeurs pour x).
- $\dfrac{5x}{2}$ décrit $]0, 5\pi[$, donc $\sin\dfrac{5x}{2}$ s'annule en changeant de signe lorsque $\dfrac{5x}{2}$ est de la forme $k\pi$, avec $k \in [\![1, 4]\!]$ (soit encore quatre valeurs).
- $\dfrac{x}{2}$ décrit $]0, \pi[$, donc $\sin\dfrac{x}{2}$ reste strictement positif (ouf !).

Il reste à trier les douze points d'annulation :

$$0 < \frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8} < \frac{2\pi}{5} < \frac{5\pi}{8} < \frac{4\pi}{5} < \frac{7\pi}{8} < \frac{9\pi}{8} < \frac{6\pi}{5} < \frac{11\pi}{8} < \frac{8\pi}{5} < \frac{13\pi}{8} < \frac{15\pi}{8} < 2\pi$$

Le tableau de signe (que je ne vais pas typographier !) est fastidieux mais simple. Terminons par le graphe de φ, qui doit être cohérent avec le tableua de signe :

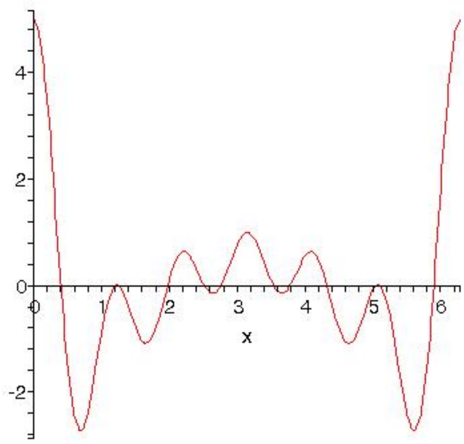

FIG. 1 – Graphe de φ

2. Notons $S(\theta)$ la somme demandée. On a clairement $S(\theta) = T'(\theta)$, avec
$$T(\theta) = \sin\theta + \sin(2\theta) + \cdots + \sin(n\theta).$$
Il reste donc à calculer T avec les techniques standards, puis dériver. Comme dans l'exercice précédent, on trouve $T(\theta) = 0$ si $\theta = 0\ [2\pi]$, et $T(\theta) = \dfrac{\sin(n\theta/2)\sin\left((n+1)\theta/2\right)}{\sin\theta/2}$ sinon.

Lorsque $\theta = 0\ [2\pi]$, on a facilement :
$$S(\theta) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\cdot$$
Bien entendu, personne n'aura dérivé en un point une expression constante valable... seulement en ce point...

Lorsque $\theta \neq 0\ [2\pi]$, on peut noter avant de dériver, que $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$, de sorte que :
$$T(\theta) = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}\cdot$$
On dérive courageusement :
$$S(\theta) = T'(\theta) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{2n+1}{2}\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} - \left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$
C'est pas joli-joli, mais bon...

3. [oops, c'était dans le DS de l'année dernière, mais c'est involontaire !] La somme en jeu est à nouveau la partie réelle d'un complexe que l'on peut calculer grâce à formule du binôme :
$$S = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}1^{n-k}\right) = \operatorname{Re}\left(1+e^{ix}\right)^n = \operatorname{Re}\left(e^{inx/2}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n\right),$$
de sorte que l'équation que l'on veut résoudre est équivalente à :
$$2^n\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\cos^n\left(\frac{x}{2}\right) = 0,$$
ce qui est équivalent à l'existence d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{nx}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ou bien $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Et ainsi, les solutions sont :
$$\left\{(2k+1)\frac{\pi}{n}\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\pi + 2k\pi\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$